HYDROLOGIE STATISTIQUE

Enoncé et Corrigé du Contrôle du 21 Janvier 2000

Promos 3HSEE et DEA-STE 1999/2000

Enseignant : R. Ababou

Exercice I

I. ANALYSE UNIVARIEE: CRUES ANNUELLES, CRUES EXTREMES *(Garonne)*

ENONCE DU I :

On propose d'étudier la Fonction de Répartition (FdR) empirique des crues de la Garonne à Toulouse (Pont-Neuf), en termes de hauteurs H, comprenant une série "scientifique" contemporaine (1940-1994), et une série "historique" plus ancienne (1770-1940) qui permet de compléter la FdR empirique vers les valeurs extrêmes (Prof. *C.Thirriot*).

Voir la **Figure ci-jointe** (fournie par *C.Thirriot*)**,** où sont représentées la FdR empirique (point par point) et une FdR ajustée (trait continu). Des explications supplémentaires sur la méthode utilisée pour construire ces FdR pourront être fournies en salle.

Répondre brièvement aux questions suivantes (y compris graphiquement si nécessaire) :

1. Quelle est la variable hydrologique étudiée (expliquez le terme "crue" ici) ?
2. Utilisez la FdR proposée pour obtenir la crue annuelle centennale (expliquez).
3. Calculez la probabilité d'observer au moins 1, au moins 2, et au moins 3 crues supérieures à la crue centennale pendant une période d'observation de 225 années.
4. A quoi pouvez-vous comparer ces probabilités, et qu'en concluez-vous ?

REPONSES DU I :

I.1. Commentaires sur la variable hydrologique étudiée et la notion de "crue"

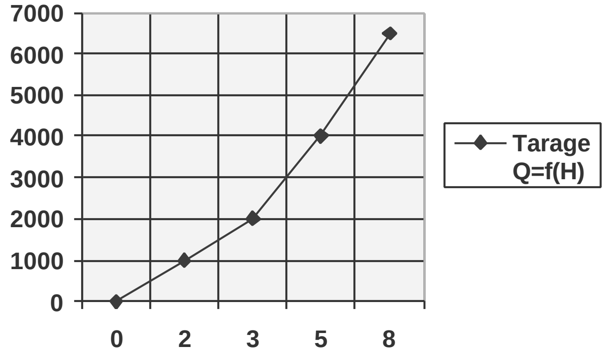
Les "crues annuelles" sont ici représentées par les maxima globaux annuels des hauteurs d'eau H relevées journalièrement (en principe du moins) à l'échelle limnimétrique du Pont-Neuf sur la Garonne.

Cependant, les hauteurs H ne sont certainement pas relevées chaque jour de l'année pour une bonne partie de la période ancienne ("historique").

De plus, seuls les maxima annuels (Hmax) suffisamment élevés, Hmax ≥ 4 m (période "historique") ou Hmax ≥ 2 m (période "scientifique"), ont été retenus. Il s'agit donc en fait de crues annuelles "conditionnelles", et le nombre de données utilisées est bien inférieur au nombre d'années. Sur les 170 ans de la période "historique" 1770-1940, on n'a utilisé qu'une douzaine de données Hmax.

Par ailleurs, il convient de réfléchir aussi à la relation entre crue annuelle, définie ici classiquement comme un maximum global annuel, et la notion d'événement rare qui conduit à la loi de Poisson et qui est plus liée aux maxima locaux qu'aux crues annuelles classiques (voir commentaires question 3).

Enfin, la courbe de tarage Q=f(H) permettant de passer des hauteurs d'eau H [m] aux débits Q [m^3/s] au Pont-Neuf n'est pas disponible pour la période "historique", mais voici quelques ordres de grandeurs "contemporains" (valeurs indicatives, pour H ≥ 2m) :



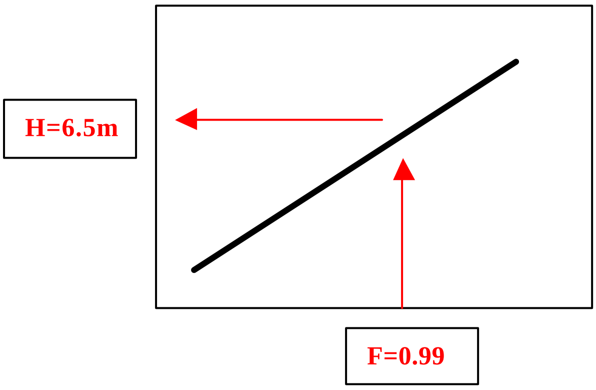
H ≈ 2 m	Q ≈ 1000 m^3/s
H ≈ 3 m	Q ≈ 2000 m^3/s
H ≈ 5 m	Q ≈ 4000 m^3/s (±)
H ≈ 8 m	Q ≈ 6500 m^3/s (±)?

Sur cette plage, la courbe de tarage Q=f(H) paraît faiblement quadratique, presque linéaire.

I.2. Crue annuelle centennale

Voir figure ci-jointe, représentant la fonction de répartition (FdR) empirique et ajustée pour les crues de la Garonne au Pont-Neuf, exprimées en niveaux d'eau H. Noter que sur ce graphique F est en abscisse et H en ordonnée.

Le schéma ci-dessous illustre la procédure permettant d'obtenir la crue (hauteur d'eau) centennale.



Crue centennale

$\Leftrightarrow$ Temps de retour To=100 ans

$\Leftrightarrow$ Probabilité de dépassement = 1 an/100 ans

$\Leftrightarrow$ Probabilité de non-dépassement F=1-1/100

$\Rightarrow$ F = 0.99

$\Rightarrow$ $\boxed{H \approx 6.5\ \text{m}}$ d'après la FdR ajustée

$\Rightarrow$ Q $\approx$ 5000 m^3/s ($\pm$) d'après courbe tarage…

I.3. Probabilités de dépassement de la crue centennale (sur la période 225 ans)

On utilisera, comme loi de probabilité du nombre de dépassements de la "crue centennale", la loi de Poisson, dite "loi des évènements rares".

Une justification est donnée en cours (polycopié). Soulignons cependant ici un point délicat : la loi de Poisson s'applique aux apparations des maxima locaux (instantanés) du processus Q(t) ou H(t) au-dessus d'un seuil fixé, et à condition que le seuil soit suffisamment élevé par rapport à la moyenne du processus.

En résumé, il y a donc implictement deux conditions à respecter pour que la loi de Poisson soit *a priori* acceptable :

1) Le seuil choisi (crue To-ennale) doit être suffisamment élevé : c'est en général correct pour des crues au moins centennales, et cela semble bien être le cas ici (on voit qu'il n'y a pas plus d'un dépassement de la crue centennale dans les 55 dernières années); et

2) Il faudrait aussi que les dépassements de la crue To-ennale ne se produisent qu'une fois dans l'année, i.e., qu'il n'y ai jamais plus qu'un seul dépassement dans la même année (par exemple en hiver ou au printemps, mais pas les deux à la fois). Pour vérifier ce point, il faudrait étudier plus en détail le régime des débits à l'aide des chroniques Q(t) ou H(t) journalières.

Enfin, une autre remarque s'impose concernant l'interprétation de la "période d'observation" de 225 ans. Il est clair que le nombre de données utilisées pour établir la FdR empirique est nettement inférieur à 225 (cf.graphique). En effet, les crues annuelles n'ont pas toutes été observées, seules celles correspondant à des niveaux $H \geq 4$ m ayant été retenues dans la période historique ($H \geq 2$ m dans la période "scientifique"). Mais on peut penser que les données ainsi "censurées" n'influencent pas beaucoup les évènements rares étudiés ici (dépassements de $H \approx 6.5$ m).

Ceci dit, on applique ici la loi de Poisson avec un temps de retour To=100 ans et une durée d'observation T=225 ans. La loi de Poisson :

$$P_T(n) = \frac{(T/T_o)^n}{n!} e^{-T/To}$$

représente la probabilité d'observer exactement n dépassements, c'est-à-dire d'observer "n" crues de niveau $\geq$ à la crue de temps de retour To années, durant une période d'observation de T années. On en déduit le nombre moyen de dépassements sur T années (en moyenne d'ensemble, ou espérance mathématique) :

$$\langle n \rangle = mT = T / T_o \ .$$

On en déduit aussi la probabilité de n'observer aucun dépassement en T années :

$$P_T(0) = e^{-T/To} = e^{-\langle n \rangle},$$

et la formule donnant la probabilité d'observer au moins K dépassements durant T années :

$$P_T(n \geq K) = 1 - \sum_{k=0}^{k=K} P_T(k),$$

Application numérique:

$\boxed{\text{<n>}}$ = 225/100 = $\boxed{\text{2.25 dépassements}}$

P(0) = e$^{-225/100}$ » e$^{-2.25}$ » (0.99)^{225} » 0.105 » 11%

P(1) » 0.236 » 24%

P(2) » 0.266 » 27%

P(3) » 0.199 » 20%

P(4) » 0.112 » 11%

$\boxed{\text{P(n³1)}}$ = 1-P(0) = 1-0.105 » 0.895 » $\boxed{\text{90\%}}$

$\boxed{\text{P(n³2)}}$ = 1-P(0)-P(1) = 1-(1+2.25)e$^{-2.25}$

» 1 - 0.3425 » 0.6575 » $\boxed{\text{66\%}}$

$\boxed{\text{P(n³3)}}$ = 1-P(0)-P(1)-P(2) =

= 1 - (1+ 2.25 + 0.5 (2.25)^2) e$^{-2.25}$

» 1 – 0.607 » 0.393 » $\boxed{\text{39\%}}$

Remarque :

On pouvait aussi utiliser la formule récursive :

P(n³K+1)=P(n³K)-P(K)

I.4. Conclusion, interprétation, discussion

Rappelons que l'on s'intéresse au nombre "n" de dépassements de la crue centennale sur 225 années. Comparons les résultats ci-dessus avec la FdR empirique provenant des observations (cf. graphique). On y voit que seuls 2 dépassements de la crue centennale (ou peut-être 3 en tenant compte des incertitudes) ont été effectivement observés durant la période d'observations de 225 ans.

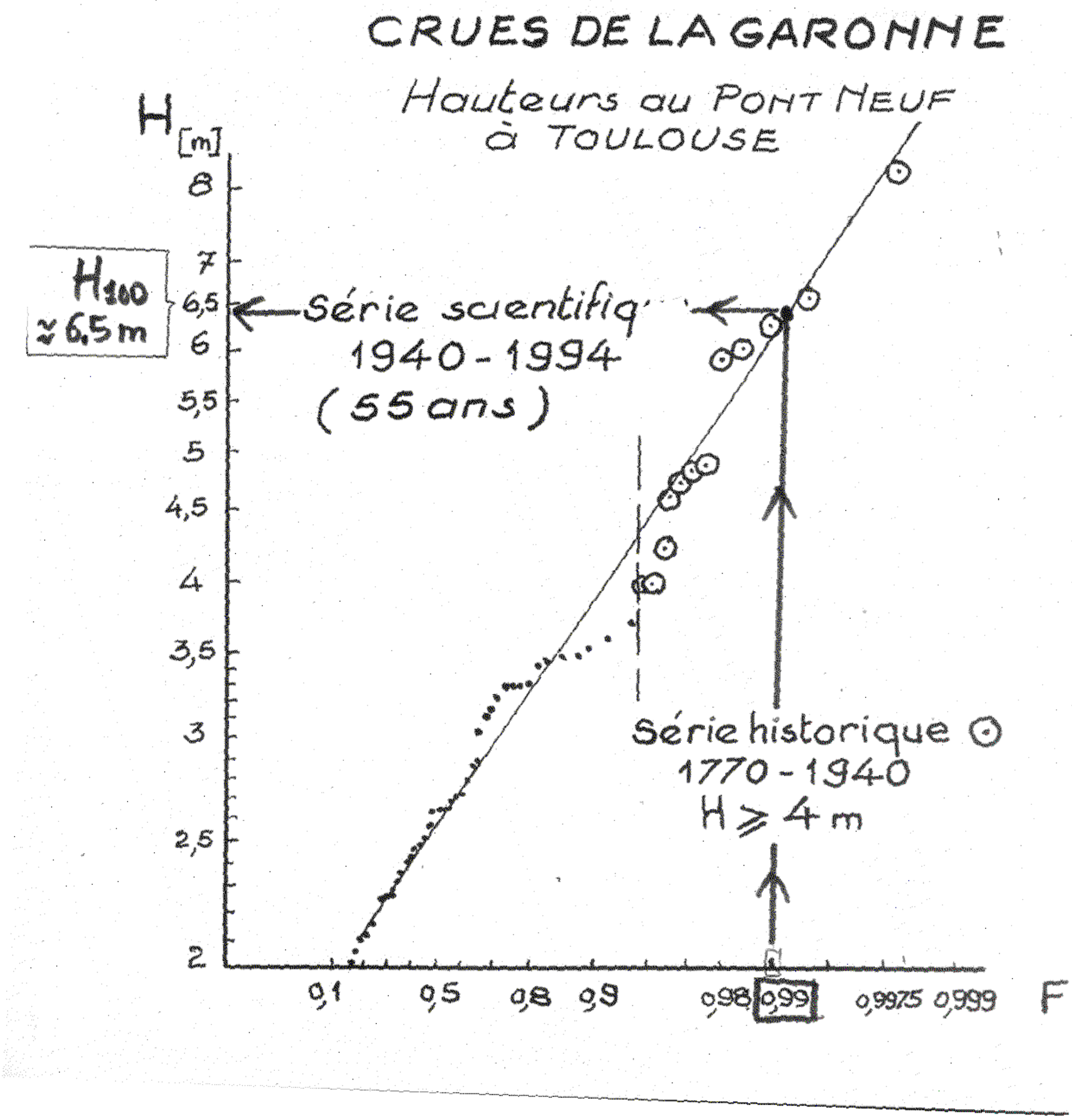
Or la "théorie poissonienne" indique que l'espérance mathématique du nombre de dépassements est 2 1/4 , ce qui correspond bien aux 2 (ou 2-3) dépassements observés.

La loi de Poisson indique aussi que l'on a 39% à 66% de "chances" d'observer au moins 2 à 3 crues ≥ centennales, ce qui tourne autour de 50% (probabilité médiane). Donc, d'après la loi de Poisson, on avait une probabilité d'environ 50% d'observer un nombre de dépassements ≥ à celui effectivement observé, ce qui semble tout à fait raisonnable.

On peut aussi comparer les observations aux probabilités d'observer exactement 0, 1, 2, 3, 4 dépassements, respectivement. D'après la loi de Poisson, la plus grande probabilité est d'en observer exactement 2, soit P(2)=27%, ce qui n'est pas contredit par les observations.

En conclusion, on constate que les prédictions "poissoniennes" concernant les probabilités de dépassement de crues centennales sont raisonnablement confirmées au vu des dépassements effectifs constatés sur une longue période (225 ans).

Ceci constitue donc, à première vue et en première apporximation, une validation *empirique* du postulat poissonien pour les crues centennales de la Garonne.


CRUES DE LA GARONNE
Hauteurs au PONT NEUF
à TOULOUSE
H [m]
8
7
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
H_{100}
≈ 6,5 m
série scientifiq
1940 - 1994
(55 ans)
série historique ⊙
1770 - 1940
H ≥ 4 m
0,1
0,5
0,8
0,9
0,98
0,99
0,9975
0,999
F