OPTIMISATION

INTRODUCTION À L'OPTIMISATION
ET APPLICATIONS EN SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

R. ABABOU
ababou@imft.fr
http://rachid.ababou.free.fr

Éléments de polycopié (format « diapos »)
Version initiale : année 2002-03
Version actuelle : année 2004-05 version 3+

OPTIMISATION

SOMMAIRE

OPTIMISATION

TABLE DES MATIÈRES DÉTAILLÉE

(en préparation)

RÉSUMÉ DE SÉANCE 1/10

INTRODUCTION GÉNÉRALE :
THÉORIES, MÉTHODES & APPLICATIONS DE L'OPTIMISATION

- LISTE DES TYPES D'APPLICATIONS (FORMULATIONS DE PROBLEMES)
- LISTE DES MÉTHODES ("OUTILS" DE L'OPTIMISATION)
- EXERCICES D'INITIATION (« MISE EN BOUCHE »)

ÉLÉMENTS DE POLYCOPIÉ "OPTIMISATION"

0) INTRODUCTION GÉNÉRALE : THÉORIES, MÉTHODES, APPLICATIONS

➔ TYPES DE PROBLÈMES D'OPTIMISATION (FORMULATIONS, APPLICATIONS)

➔ TYPES DE MÉTHODES (OUTILS DE L'OPTIMISATION)

➔ 1ERS EXERCICES SIMPLES D'INITIATION (« MISE EN BOUCHE »)

1. L'optimisation sous toutes ses formes (plus ou moins déguisées):

- **Optimisation libre** (*sans* contraintes)
- **Optimisation liée** (*sous* contraintes)
- Programmation mathématique
- Programmation dynamique
- Recherche opérationnelle
- **Régression** linéaire simple ou multiple
- **Estimation** optimale d'un vecteur d'état (théorie de Bayes : prédiction temporelle, géostatistique, etc).
- **Régression non linéaire** (identification de paramètres, calage de modèles).
- Résoudre système matriciel ← Minimiser forme quadratique ← **Least Squares** ← Système surdéterminé
- **Calcul variationnel** pour optimiser une fonctionnelle (intégrale de chemin, énergie, résidus pondérés…)

2. Les méthodes et outils théoriques de l'optimisation

- Algèbre linéaire et systèmes matriciels $\mathbf{A\ x = b}$ (y compris solveurs numériques)
- Analyse différentielle de fonctions de plusieurs variables $\mathbf{f(x_1,\ldots,x_N)}$
- Méthode du simplexe graphique, ou algébrique (algorithme du simplexe)
- Concepts mathématiques étroitement liés à la physique, mécanique, économétrie (contraintes, degrés de libertés, convexité, pénalisation, variables d'ajustement, *shadow prices*, etc…)
- Analyse fonctionnelle et calcul variationnel

3. Les applications de l'optimisation (voir exemples plus bas)

- Aires et longueurs optimales, géodésiques, etc
- Caractérisation des points critiques des surfaces (relief, hydrographie)
- Hydrostatique des films, gouttes et bulles : surfaces minimales en espace 3D.
- Mécanique "rationnelle" Lagrange-Hamilton : formulations variationnelles…
- Gestion optimale….(exemple des 3 stations de traitement au fil de l'eau)
- Gestion dynamique de stocks et flux :…
- Calcul numérique : méthodes variationnelles; méthodes des résidus pondérés (FEM, etc)
- Calcul numérique : résolution des systèmes discrets par gradients conjugués…
- Optimisation fonctionnelle linéaire: déconvolution optimale d'un système in/out linéaire.
- Calage d'un modèle nonlinéaire analytique ou numérique : exemple modèle réservoir.
- Problèmes de contrôle en boucle ouverte (sans rétro-action) ou fermée (avec rétro-action) : opérations d'ouverture-fermeture de vannes de canaux et barrages; servo-mécanismes; etc.

4. Premiers exemples d'optimisation classés par type d'application

0) Introduction

On se contente de formuler, dans cette section, différents types de problèmes d'optimisation. Certains de ces exemples seront repris dans la suite du texte, mais dans un ordre différent. Voir les problèmes résolus dans la suite du texte et les annexes.

Dans la suite, on classera les problèmes par type d'application et non par type de méthode mathématique. Il convient cependant de distinguer d'abord certaines différences mathématiques marquantes à travers quelques exemples "académiques" (pour illustration) :

Optimisation Libre : Min $J(x) = (x+1)^2$ sans contraintes ➔ $x^{OPT} = -1$

Optimisation Contrainte : Min $J(x) = (x+1)^2$ sous contrainte $x \geq 0$ ➔ $x^{OPT} = 0$.

Optimisation Linéaire : Min $J(x) = ax+b$ sous contrainte $x \in [x_1,x_2]$

Optimisation Nonlinéaire : Min $J(x) = ax^2+bx+c$ sous contrainte $x \in [x_1,x_2]$

Dans le 1er cas, l'optimum ne peut être que l'une des deux bornes x_1 ou x_2.

Dans le 2nd cas, l'optimum peut être une des deux bornes, ou bien, un point intérieur.

Optimisation Classique: Minimiser une fonction $J(x)$ ➔ Etat optimal $x^{OPT} \in IR$ ou IR^N

Optimisation Fonctionnelle : Minimiser une fonctionnelle $J(y(x))$ ➔ Fonction $y(x)^{OPT}$

Dans les deux cas, la quantité à minimiser est scalaire : fonction(nelle) *objectif* $J \in IR$.

1) Problèmes de géométrie et de chemin (optique géométrique, etc)

Géométrie plane: **Problème isopérimétrique de la reine Didon ("*Dido*") de Carthage…**

Optique géométrique: **Principe de FERMAT**.

Dans un milieu continu isotrope mais inhomogène, le chemin optique (rayon de lumière) ne suit pas une droite mais une courbe C qui **minimise le temps** de traversée du milieu (problème du plus "court" chemin optique…). Ce principe revient alors à minimiser **l'intégrale de chemin (fonctionnelle)** :

$$J = \int_C n(x, y, z)\,ds(x, y, z)$$

où n(x,y,z) est l'indice de réfraction du milieu (connu), et ds(x,y,z) est l'élément d'abscisse curviligne le long du chemin C à optimiser. On peut considérer que J est une fonctionnelle de s(x,y,z). Il s'agit d'un problème d'optimisation fonctionnelle à résoudre par calcul variationnel.

Exemple :

Traversée d'un milieu continûment stratifié dans le plan (x,z), d'indice $n(z)=n_0.\exp(z/\lambda)$, connaissant l'angle du rayon incident en x=z=0.

2) Problèmes de mécanique du point, structures, milieux déformables

Principe : Si les forces proviennent de potentiels, le théorème des travaux virtuels équivaut à minimiser l'énergie potentielle.

1er exemple. **Problème d'élasticité statique 1D : flexion d'une poutre élastique inhomogène**.

Le potentiel total à minimiser comprend l'énergie stockée par les contraintes élastiques et l'énergie gravitationnelle, d'où l'intégrale (fonctionnelle) :

$$J = \int_0^L \left(\frac{k(x)}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho(x) y \right) dx = J(y''(x), y(x), x)$$

où y(x) est le déplacement transverse de la barre, ρ(x) la masse volumique de la barre, k(x) son coefficient de raideur. Résoudre les équations de l'élasticité revient à minimiser la fonctionnelle J(y'',y,x). La fonction optimale $y(x)^{OPT}$, solution du problème d'optimisation, est solution d'équilibre du problème d'élasticité.

2nd exemple: **Problème de la brachistochrone en balistique** (ou en mécanique du point).

Il s'agit d'obtenir la forme de la courbe le long de laquelle une masse soumise à l'accélération de la gravité se déplacera en un temps minimum d'un point A (x_A,z_A) en un point B (x_B,z_B) situé plus bas. La solution n'est pas une droite : c'est la **brachistochrone**, courbe de plus rapide descente, obtenue par J.BERNOULLI en 1696.

3ème exemple: **Problème d'équilibre statique d'une chaîne articulée *discrète(*)*.**

Par exemple on prend N=3 barraux rigides, librement articulés entre eux et en leur point d'ancrage. On doit minimiser l'énergie potentielle (gravitationnelle) de l'assemblage :

$$V = \rho g \sum_{k=0}^{k=N-1} \left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2} \right) L_{k+1/2}$$

en tenant compte des "contraintes" reliant les positions aux longueurs des barraux :

$$L_{k+1/2}^2 = \left(x_{k+1} - x_k\right)^2 + \left(y_{k+1} - y_k\right)^2$$

L'équilibre d'une chaine discrète se présente ainsi comme un problème d'optimisation sous contraintes de type ordinaire (non variationnel).

(*) *Note* : Le problème *continu* correspondant est le problème du catenaire (câble suspendu), qui requiert l'optimisation d'une fonctionnelle par calcul variationnel (*voir ci-dessous*)…

4ème exemple: **Equilibre statique d'un câble suspendu *continu* (problème du catenaire).**

Au lieu d'une chaîne discrète, il s'agit cette fois d'un câble continu.

Le câble est ancré aux deux bouts (qui ne sont pas nécessairement sur une même horizontale).

Ce problème est le passage à la limite N→∞ & L→0 du problème de la chaîne discrète (plus haut). On peut cependant le traiter directement sans passage à la limite, grâce au calcul variationnel.

Approche variationnelle :

On représente la courbe recherchée y(x) sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$$

On cherche à minimiser l'intégrale d'énergie potentielle (gravitationnelle) :

$$V = \int_{\tau_1}^{\tau_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\tau \quad \text{où} \quad x'(\tau) = dx/d\tau \; ; \; y'(\tau) = dy/d\tau$$

sous "contrainte" que la longueur du câble soit respectée.

SUITE du 4ème exemple: **Equilibre statique d'un câble suspendu *continu* (problème du catenaire).**

…On doit maintenant formuler la contrainte « longueur de câble fixée » :

- soit en imposant une *contrainte locale* sur les longueurs élémentaires: $x'^2 + y'^2 = 1\,(\forall \tau)$,
- soit en imposant une *contrainte globale* sur la longueur totale: $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\tau = L$.

La 1ère méthode revient à imposer que "τ" représente l'abscisse curviligne "s" :
dτ = ds (élément de longueur).

La 2nde méthode revient à imposer globalement la longueur totale du câble.

Les deux méthodes donnent le même résultat.

Finalement, en minimisant la fonctionnelle V(x',y',y) sous l'une des contraintes ci-dessus, on obtient après calculs (...) la forme y(x) d'un câble suspendu aux 2 bouts :

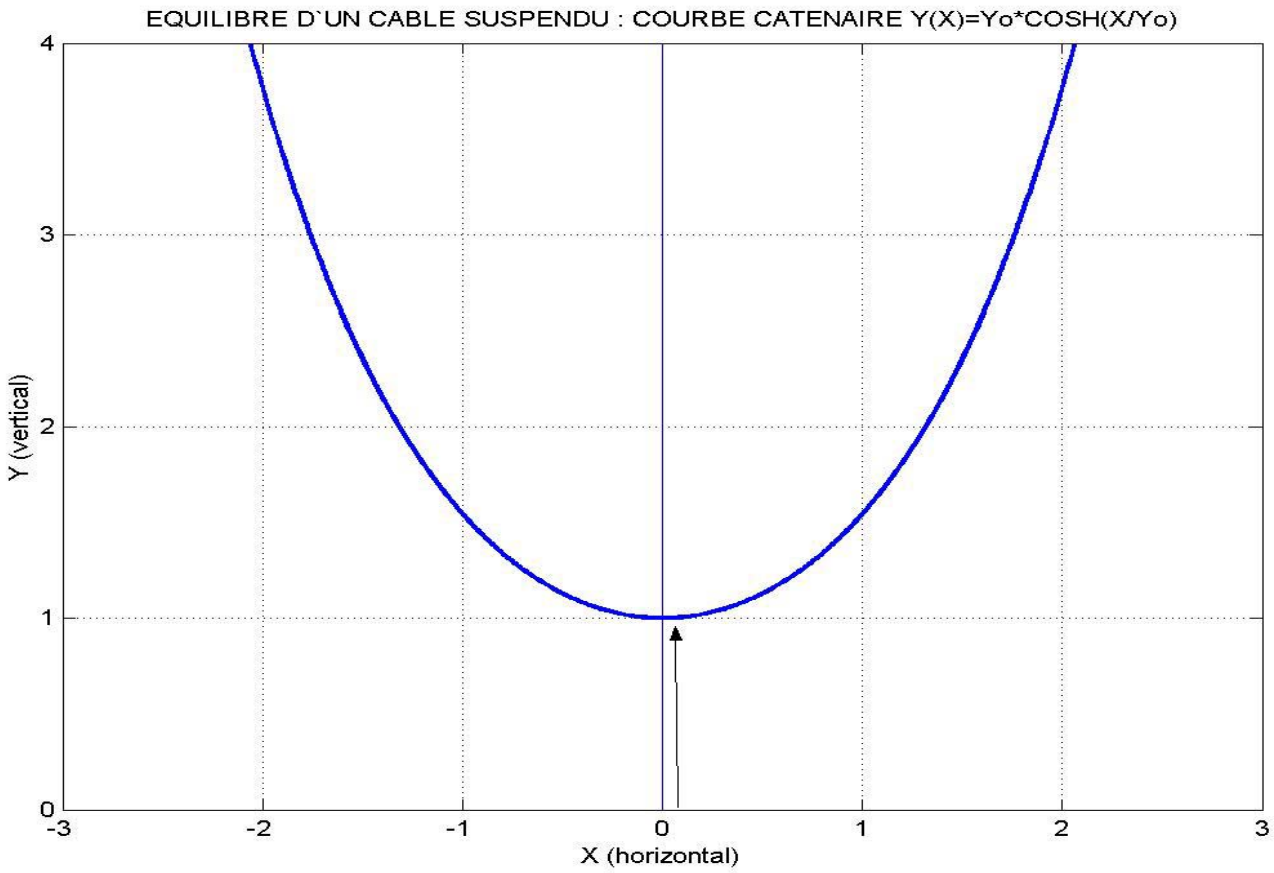
$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x}{y_0}\right)$$

, où y_0 est l'ordonnée du point bas de la catenaire.

C'est la célèbre *catenaire* en cosinus hyperbolique : voir **figure** ci-jointe.

COURBE CATENAIRE :

LE CALCUL VARIATIONNEL DE MINIMISATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE DONNE LA FORME D'EQUILIBRE D'UN CABLE SUSPENDU PAR SES DEUX EXTREMITES



3) Problèmes de mécanique des fluides

Interfaces diphasiques (hydrostatique de films, bulles, gouttes) :

Partant du principe de minimisation de l'énergie de l'interface, et considérant le cas d'un film liquide limité par une courbe de Jordan (courbe fermée C de IR^3), on en déduit le principe de minimisation de l'aire (énergie interfaciale). On montre que la solution est une surface de courbure totale constante (surface qui reste ensuite à déterminer pour une courbe C donnée!).

Contrôle optimal d'un corps en milieu fluide (machines, propulseurs) :

Contrôle optimal d'un corps en déplacement dans un fluide visqueux. Ce problème de calcul variationnel consiste à optimiser une force de contrôle (bornée) de façon à ramener le corps en mouvement à l'origine en minimisant le temps total, ou le coût total de l'opération [d'après Isaacs 1965, et Hale & Lasalle 1963].

4) Problèmes de gestion industrielle (min coûts, max profits, allocation ressources)

Planification optimale d'un système de production ou d'un chantier (cas typique) :

Une usine fabrique 3 « produits » à l'aide de 3 « machines ». Chaque produit requiert un certain temps de passage (qui peut être nul) à travers chacune des machines (en minutes/jours). Chaque "machine" a une capacité de travail limitée (en minutes/jour). Les profits (c_1,c_2,c_3) par unités produites sont connus (en Euros/Unité). Les quantités à produire x_1, x_2, x_3 (Unités/jours) doivent être déterminées de façon à maximiser le profit total $J = c_1.x_1+c_2.x_2+c_3.x_3$ (Euros).

Avec les données du tableau ci-dessous, ce problème d'optimisation s'écrit :

$$\textit{Maximiser} \quad J = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \textit{ sous contraintes :} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

MACHINES	TEMPS DE PRODUCTION PAR PRODUIT (minutes/jour)			CAPACITÉ MAX DES MACHINES (minutes/jours)
	P_1	P_2	P_3	
M_1	*1*	*2*	*1*	430
M_2	*3*	*0*	*2*	460
M_3	*1*	*4*	*0*	420
PROFIT (€/Unité)	**3**	**2**	**5**	

5) Problèmes de gestion et d'exploitation de l'environnement (ressources en eau, pétrole,…)

Gestion optimale d'un système de trois stations de traitement d'eau.

Prenons le cas de 3 villes situées au bord d'un fleuve, dans lequel elles rejettent leurs effluents après traitement. Les effluents traités sont donc rejetés en rivière par 3 stations de traitement S1, S2, S3 (de l'amont vers l'aval). Les coût de traitements sont proportionnels à l'efficacité du traitement (techniquement limitée à 95%). La réglementation fixe le niveau de pollution maximum admissible en tout point de la rivière en termes de Demande Biologique en Oxygène ("DBO").

On souhaite minimiser le coût total de traitement des 3 stations sous contrainte de la limitation technique et de la réglementation sur le niveau maximum admissible de pollution, en tenant compte aussi du fait que la station *N°i* déverse vers les stations avales $j > i$.

La solution optimale donnera le coût et l'« efficacité » du traitement à mettre en œuvre pour chacune des 3 stations. Pour la formulation mathématique du problème, voir *exercices annexes*…

6) Problèmes de modélisation et de calculs numériques

Méthodes de Résidus Pondérés (*Weighted Residual Methods*):

Très large classe de méthodes de résolution numérique d'EDP basées sur la minimisation d'une fonctionnelle (discrétisée) de l'erreur : Méthode d'Eléments Finis, Méthodes de Collocation, Méthodes Least Squares (Moindres Carrés), Méthodes Spectrales…

Régressions nonlinéaires et calages de modèles (*Nonlinear Regression and/or Model Calibration*):

Modèles numériques spatio-temporels (grand nombre de paramètres à caler).
Modèles analytiques non linéaires.

1ère PARTIE :

OPTIMISATION NON FONCTIONNELLE

(SYSTEMES DISCRETS, CALCUL DIFFÉRENTIEL)

I. OPTIMISATION LIBRE (SANS CONTRAINTES) : CAS GÉNÉRAL NON LINÉAIRE

1. **Introduction à l'optimisation libre (applications, méthodes)**
2. **Remarque préalable sur le cas linéaire sans contrainte (trivial)**

   FONCTION OBJECTIF LINÉAIRE SANS CONTRAINTES (PROBLEME TRIVIAL, SOLUTION NON BORNÉE)
3. **Problèmes a variable d'état scalaire ("1D")**

   FONCTION OBJECTIF QUADRATIQUE (OPTIMISATION QUADRATIQUE ET REGRESSION SIMPLE)

   FONCTION OBJECTIF NONLINÉAIRE QUELCONQUE (OPTIMISATION NONLINÉAIRE)
4. **Problèmes d'optimisation 2-D et points critiques d'une surface z=F(x,y)**

   OPTIMISATION 2-D : POINTS CRITIQUES ET EXTREMA D'UNE SURFACE Z=F(X,Y)

   APPROFONDISSEMENT : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET PROPRIÉTÉS DES SURFACES Z=F(X,Y)

   APPLICATIONS : ANALYSE MORPHOLOGIQUE DU RELIEF Z=F(X,Y); POTENTIEL HARMONIQUE ϕ=F(X,Y);…
5. **Problèmes a variable d'état vectorielle (généralisation "multi-D")**

   MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE → RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE SYMÉTRIQUE > 0

   MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE ← RÉGRESSION LINÉAIRE, ESTIMATION BAYES

   OPTIMISATIUON NONLINÉAIRE GÉNÉRALE (REGRESSIONS NONLINÉAIRES ET CALAGES DE MODÈLES)
6. **ANNEXE : Récapitulation des conditions générales d'optimalité libre.**

OPTIMISATION LIBRE – APERÇU GÉNÉRAL

REMARQUE PRÉALABLE SUR LE CAS LINÉAIRE:

FONCTION OBJECTIF « J » LINÉAIRE, SANS CONTRAINTES → PROBLEME TRIVIAL !

PROBLÈMES NONLINÉAIRES A VARIABLE D'ETAT SCALAIRE

FONCTION OBJECTIF QUADRATIQUE → ÉQUATION LINÉAIRE : PROBLÈME ULTRA-SIMPLE

FONCTION OBJECTIF QUELCONQUE → OPTIMISATION NONLINÉAIRE : $\partial J/\partial X = 0$ (ETC...)

PROBLÈMES A VARIABLE D'ETAT VECTORIELLE (GÉNÉRALISATION)

RÉGRESSION MULTIPLE → MINIMISATION QUADRATIQUE → SYSTÈME LINEAIRE SYM>0

MINIMISER OBJECTIF NONLINÉAIRE (CALAGE, RÉGRESSION NONLIN) → $\partial J/\partial X_I = 0$ (ETC!...)

1. Introduction à l'optimisation libre (applications, méthodes)

Bien qu'une grande partie des problèmes d'optimisation se présentent comme des problèmes d'optimisation "liée" (sous contrainte), ces derniers peuvent se ramener à des problèmes "libres" (sans contraintes) par augmentation de variables (les multiplicateurs de Lagrange pour les contraintes égalités, et des variables d'ajustement ou variables d'écart, pour les contraintes inégalités, comme on verra dans les autres chapitres).

Dans certains cas tels que **l'analyse du relief z = F(x,y)**, l'optimisation libre a un intérêt direct et évident : elle permet d'identifier les pics (maxima) et les creux (minima), ainsi que les cols (points selles), avant de passer à une analyse plus approfondie (lignes de creux et de crêtes; rugosité; courbures; géodésiques…).

Un autre type de problème très familier est le modèle de **régression linéaire y* = ax+b** en statistique. Les paramètres (a,b) du modèle sont obtenus en appliquant deux critères : (1) le critère de non-biais qui donne $b = m_Y - a.m_X$, et (2) le critère de minimisation de la variance des écarts entre observations (y) et modèle (y*). Cette 2ème étape est un problème d'optimisation, d'où l'on tire la valeur optimale de $a = \rho.\sigma_Y/\sigma_X$.

Dans de nombreuses autres applications, seule une résolution numérique de l'optimum est envisageable. Le tableau suivant liste quelques applications et **méthodes numériques d'optimisation** envisageables ici.

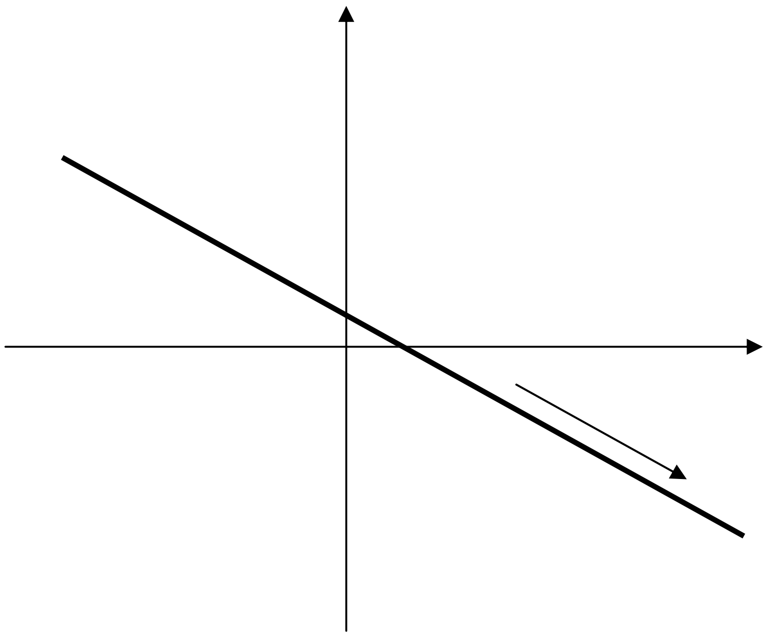
MÉTHODES D'OPTIMISATION ENVISAGEABLES :	PROBLÈMES D'OPTIMISATION ENVISAGÉS :
❑ Application directe des conditions d'optimalité (sans approximation numérique); ❑ Steepest descent; Gradients conjugués; ❑ Gauss-Newton; Newton; ❑ Fletcher-Reeves; Levenberg-Marquardt; ❑ Autres méthodes numériques	❑ Régression linéaire simple (min.variance); ❑ Régression linéaire multiple et estimation bayesienne optimale d'un vecteur d'état; ❑ Régression nonlinéaire et/ou calage d'un modèle nonlinéaire (numériques ou non) ❑ Analyse du relief : surface z=f(x,y).

NB: Voir plus loin, le résumé des conditions générales d'optimalité en l'absence de contraintes.

2. Remarque préalable sur le cas linéaire sans contrainte (solution triviale, non bornée !)

FONCTION OBJECTIF LINÉAIRE SANS CONTRAINTES :

LE PROBLEME EST TRIVIAL, LA SOLUTION EST NON BORNÉE (INFINIE).



Problème d'optimisation :

Min $F(x) = ax+b$
$x \in IR$ (pas de contraintes)

Solution optimale non bornée :

- si $a < 0$: $x_{OPT} \to +\infty$ (cas de la figure ci-contre)
- si $a > 0$: $x_{OPT} \to -\infty$

Remarque : la solution optimale est non bornée.

Idem dans le cas N-dimensionnel :	Min $F(x_1,\ldots,x_N) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}$ (forme linéaire) $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_N) \in IR^N$ (sans contraintes) La solution optimale est non bornée…

3. Problèmes a variable d'état scalaire ("1D")

FONCTION OBJECTIF QUADRATIQUE, SANS CONTRAINTES :

L'OPTIMUM EST SOLUTION D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE SIMPLE…

OU BIEN L'OPTIMUM EST NON BORNÉ.

FONCTION OBJECTIF NONLINÉAIRE QUELCONQUE, SANS CONTRAINTES :

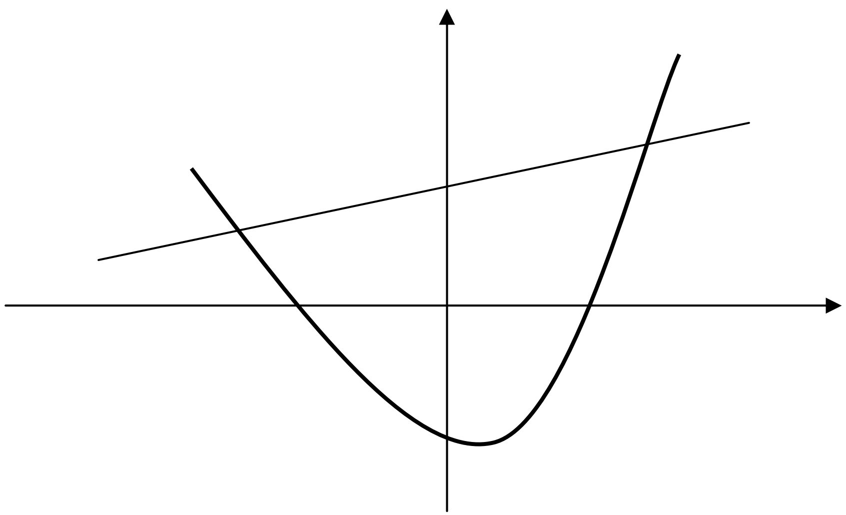
APPLIQUER **TOUTES** LES CONDITIONS D'OPTIMALITÉ…

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ DU **1ER ORDRE**

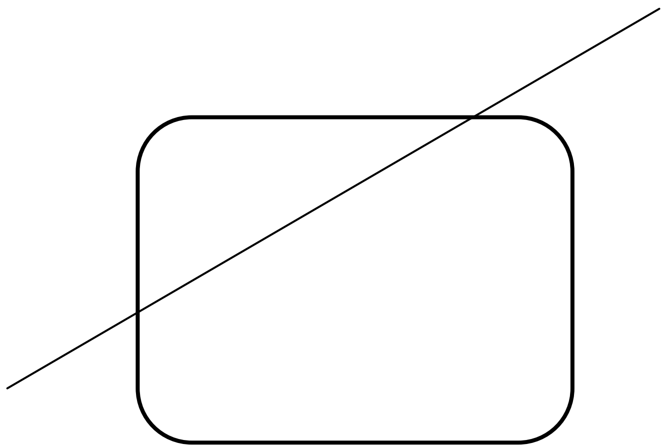
CONDITIONS D'OPTIMALITÉ DU **2ND ORDRE**

ANNEXE : Notion de fonction convexe (cf. conditions d'optimalité du 2nd ordre)

ENSEMBLE CONVEXE E	$\forall x', x'' \in E : \lambda x' + (1-\lambda)x'' \in E$	Si F(x) différentiable 2 fois ♥
FONCTION CONVEXE F(X)	$\lambda F(x') + (1-\lambda)F(x'') \geq F(\lambda x' + (1-\lambda)x'')$	$\partial^2 F/\partial x^2 \geq 0 \leftarrow$ ♥
FONCTION CONCAVE F(X)	$\lambda F(x') + (1-\lambda)F(x'') \leq F(\lambda x' + (1-\lambda)x'')$	$\partial^2 F/\partial x^2 \leq 0 \leftarrow$ ♥



FONCTION CONVEXE F(X)



ENSEMBLE CONVEXE E

ANNEXE : Conditions de convexité (cf. conditions d'optimalité du 2nd ordre)

FONCTION CONVEXE $IR^N \rightarrow IR$:	$F(x_1,\ldots,x_N)$ strictement convexe si la matrice Hessienne $H > 0$.

- *Définition de la matrice Hessienne **H** :* $\mathbf{H} = [H_{ij}] = [\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j]$
- *Positivité stricte de **H** :* $\mathbf{H} > 0 \Leftrightarrow$ **H** définie positive

  $\Leftrightarrow \mathbf{x'}^{\mathbf{T}}\, \mathbf{H}\, \mathbf{x''} > 0\ ,\ \forall \mathbf{x'} \neq \mathbf{0},\ \forall \mathbf{x''} \neq \mathbf{0}$
- *Propriété utile à faible dimension N :*

H > 0 si les N inégalités suivantes sont satisfaites :

$$(1) : \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} > 0;$$

$$(2) : Det \begin{bmatrix} \partial^2 F / \partial x_1^2 & \partial^2 F / \partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 F / \partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 F / \partial x_2^2 \end{bmatrix} > 0;$$

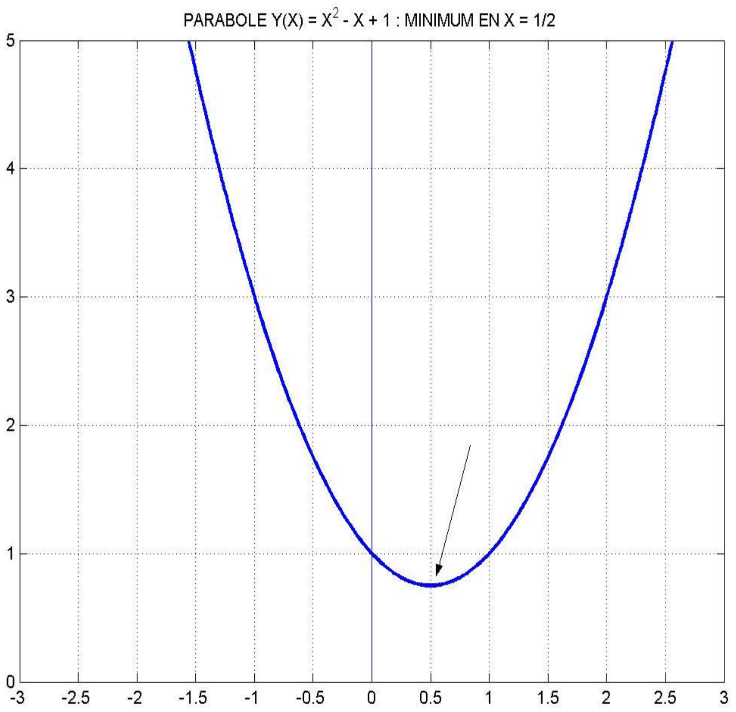
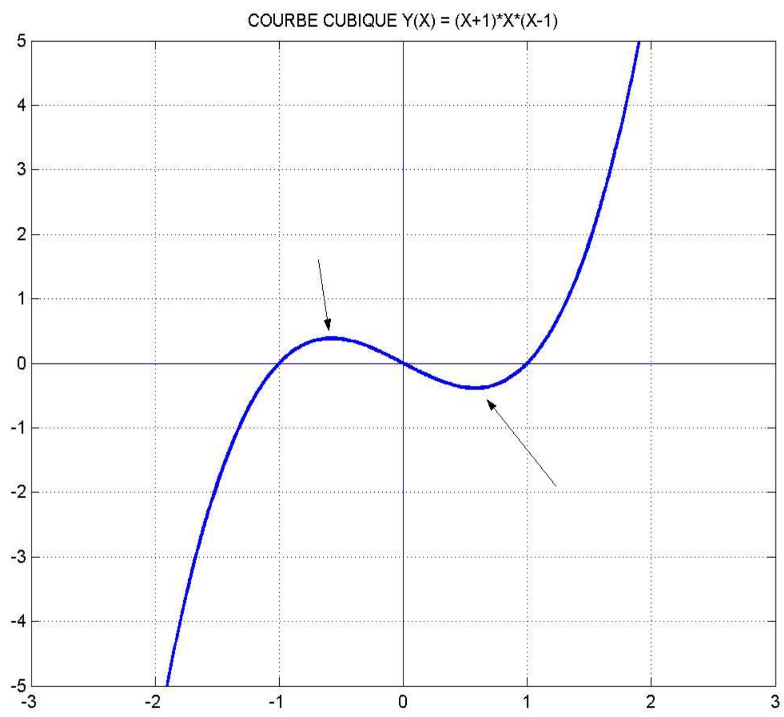
$$(i) : \ \ldots\ldots ;$$

$$(N) : Det\left[\mathbf{H}\right] > 0$$

CONDITIONS <u>LOCALES</u> D'OPTIMALITÉ CAS DE LA MINIMISATION SANS CONTRAINTES D'UNE FONCTION $F(x_1,\ldots,x_N)$	
1) Conditions nécessaires = cond. du 1^er^ ordre (grad F = 0)	Les conditions du 1er ordre $\partial F/\partial x_i = 0$ (i=1,…,N) sont nécessaires; elles déterminent les points critiques **x*** parmi lesquels peuvent se trouver le ou les minima locaux (s'ils existent).
2) Conditions suffisantes = cond. du 2nd ordre (H > 0)	La condition du 2nd ordre pour un minimum local est **H** > 0 (Hessienne définie positive). C'est une condition d'optimalité suffisante en **x*,** les conditions du 1er ordre y étant déjà vérifiées.
3) Cas de dégénérescence (**H** = **0**)	Cependant, si **H = 0** en **x***, les conditions suffisantes d'optimalité sont à rechercher à des ordres de différentiation plus élevés. Cas d'une fonction univariée F(x) : si $H = \partial F^2/\partial x^2 = 0$ en x*, on doit vérifier successivement les dérivées d'ordre k=3, k=4, etc. On a un optimum local si la 1ère dérivée non nulle est d'ordre pair (si la 1ère dérivée non nulle est d'ordre impair, il s'agit d'un point d'inflexion).
4) Cas des points selles (**H** indéfinie)	Si **H** est une matrice indéfinie en **x*,** alors **x*** n'est pas un extremum local (c'est un « col », ou « point selle »).

CONDITIONS <u>GLOBALES</u> D'OPTIMALITÉ CAS DE LA MINIMISATION SANS CONTRAINTES D'UNE FONCTION $F(x_1,\ldots,x_N)$	
Condition de convexité	▪ Si F(**x**) est partout convexe, alors si **x*** est minimum local il est nécessairement aussi minimum global, solution du problème. ▪ Par contre, si F(**x**) non convexe, il peut y avoir plusieurs minima locaux, parmi lesquels se trouve le minimum global recherché.

ILLUSTRATIONS # 0.0.0 (DIVERS)

QUADRIQUE	CUBIQUE
	

EXERCICE # 0.0

MINIMISATION LIBRE D'UNE FONCTION OBJECTIF QUADRATIQUE UNIVARIÉE

$F(X) = A.X^2 + B.X + C$

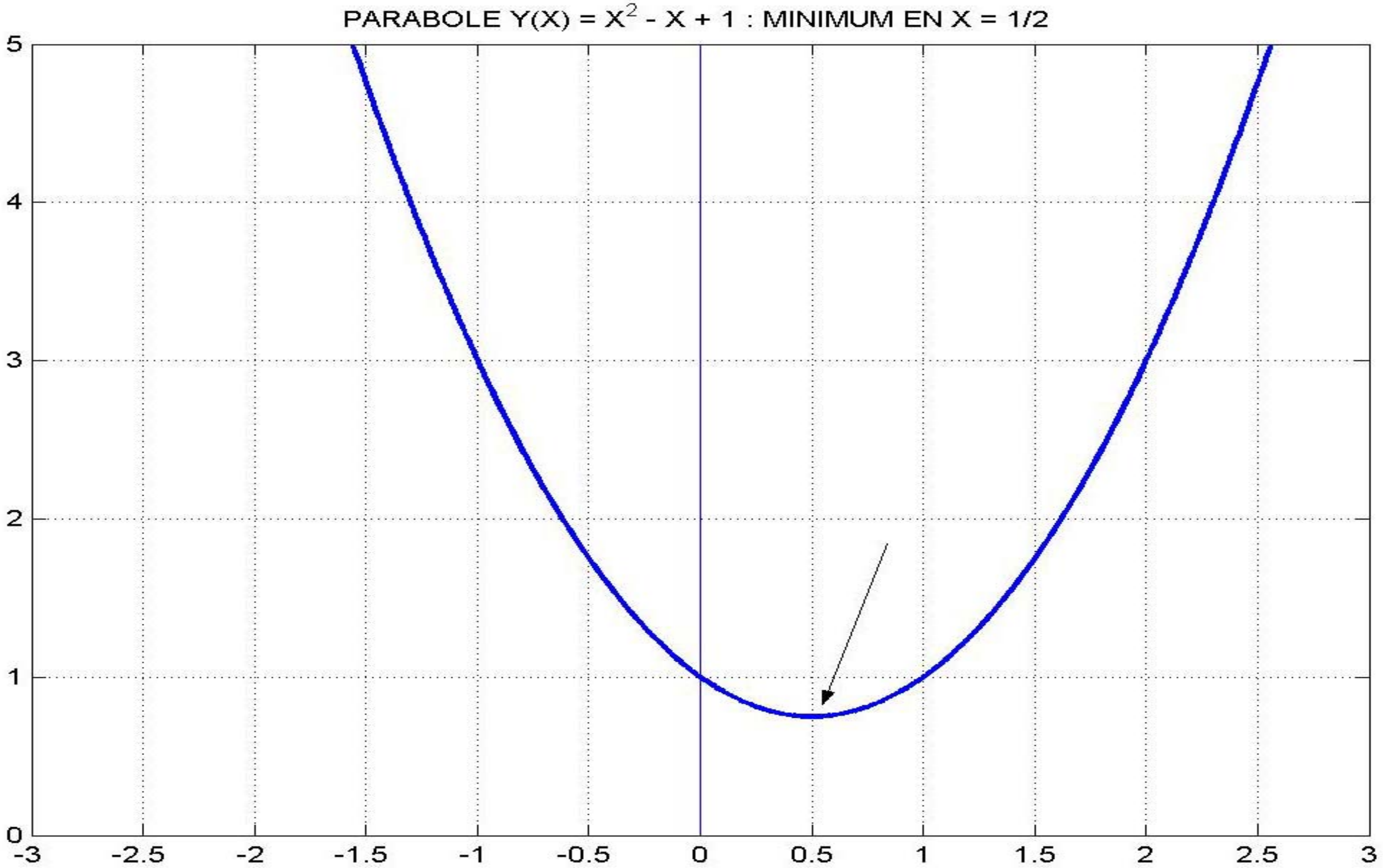
Minimiser : $F(x) = ax^2 + bx + c$ *...Sans aucune contrainte ($x \in IR$)*

1ER CAS : A > 0 (FONCTION CONVEXE)	2ND CAS : A < 0 (FONCTION CONCAVE)
Optimisation libre: Min $F(x) = ax^2+bx+c$ Condition nécessaire du 1er ordre $\partial F/\partial x=0$: $\partial F/\partial x=0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x^* = - b/2a$ Condition du 2nd ordre (convexité): $\partial^2F/\partial x^2 > 0$? $\partial^2F/\partial x^2 = 2a > 0 \Rightarrow F(x)$ convexe $\Rightarrow x^*$ min. Conclusion : $x^* = - b/(2a)$ minimise l'objectif $F(x)$, et la valeur optimale de l'objectif est : $F^*=ax^{*2}+bx^*+c \Rightarrow F^* = - b^2/(4a) + c$	"""""""""""""""""" """""""""""""""""" """""""""""""""""" Condition du 2nd ordre (convexité): $\partial^2F/\partial x^2 > 0$? $\partial^2F/\partial x^2 = 2a < 0 \Rightarrow F(x)$ concave $\Rightarrow x^*$ max. Conclusion : Le point critique $x = -b/2a$ maximise $F(x)$... ce n'est donc pas un minimum de $F(x)$ (le minimum est obtenu en $x^* \to \pm\infty$).

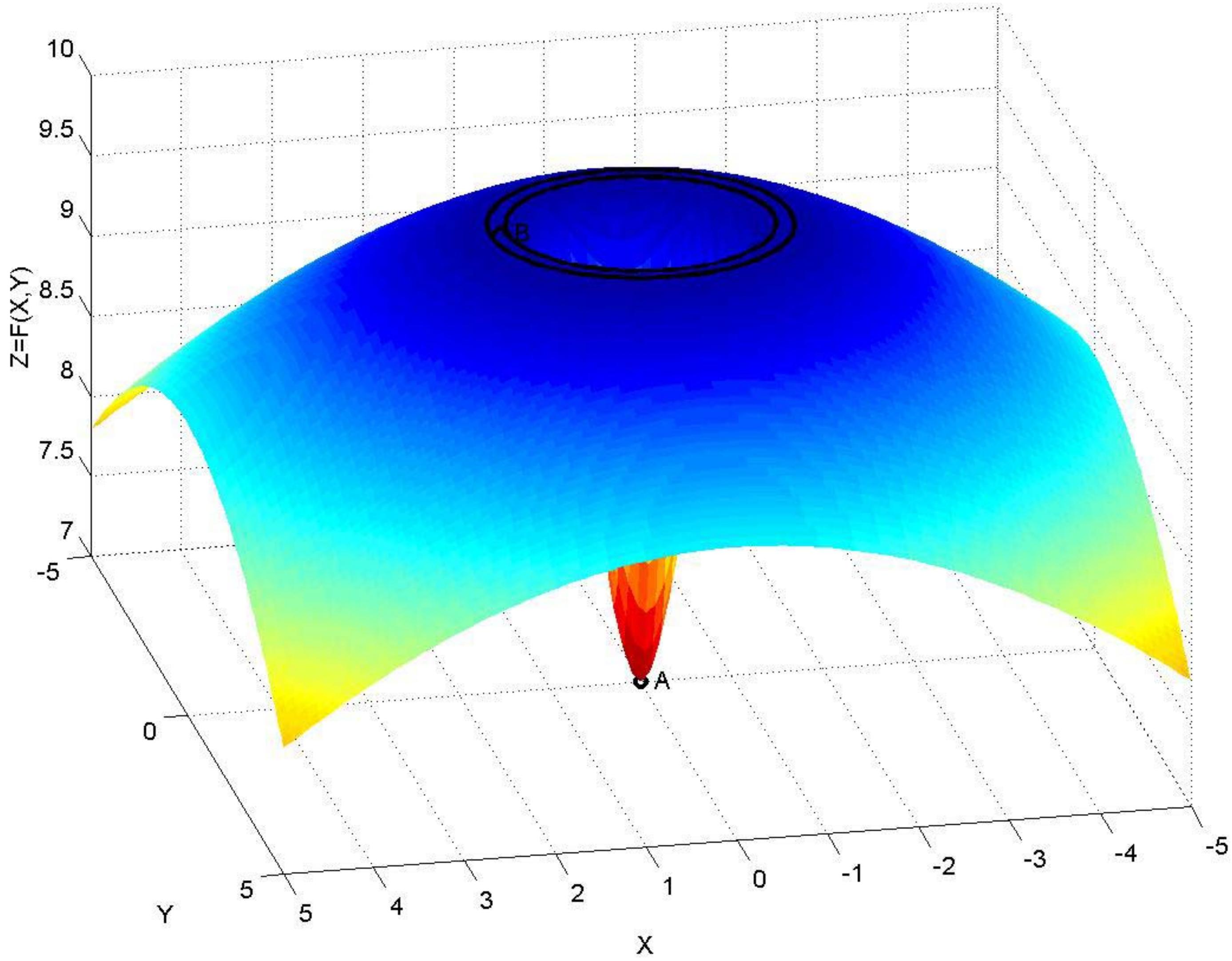
SUITE EXERCICE # 0.0

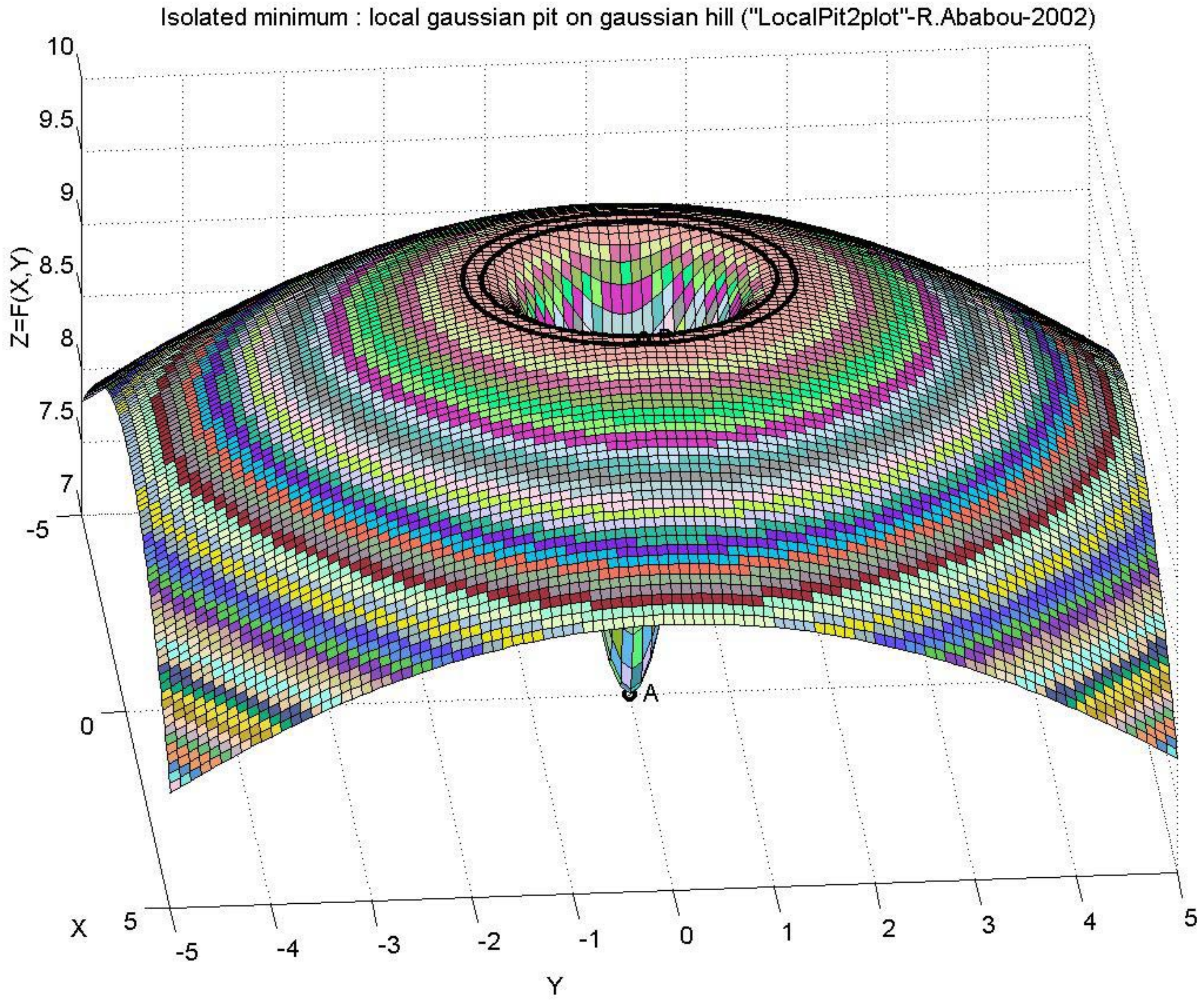
MINIMISATION LIBRE D'UNE FONCTION OBJECTIF QUADRATIQUE UNIVARIÉE

$F(X) = A.X^2 + B.X + C$



LOCAL PIT

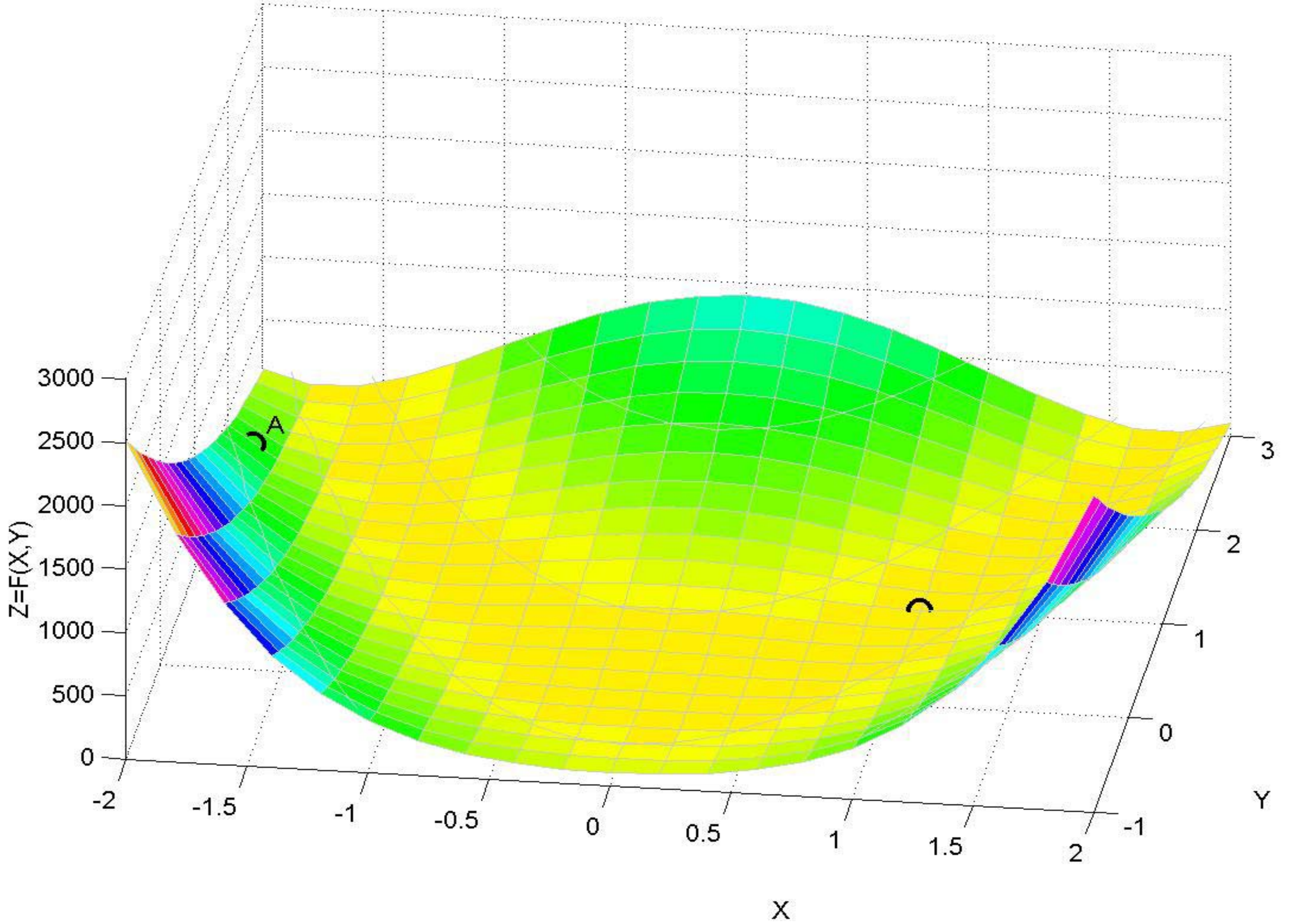




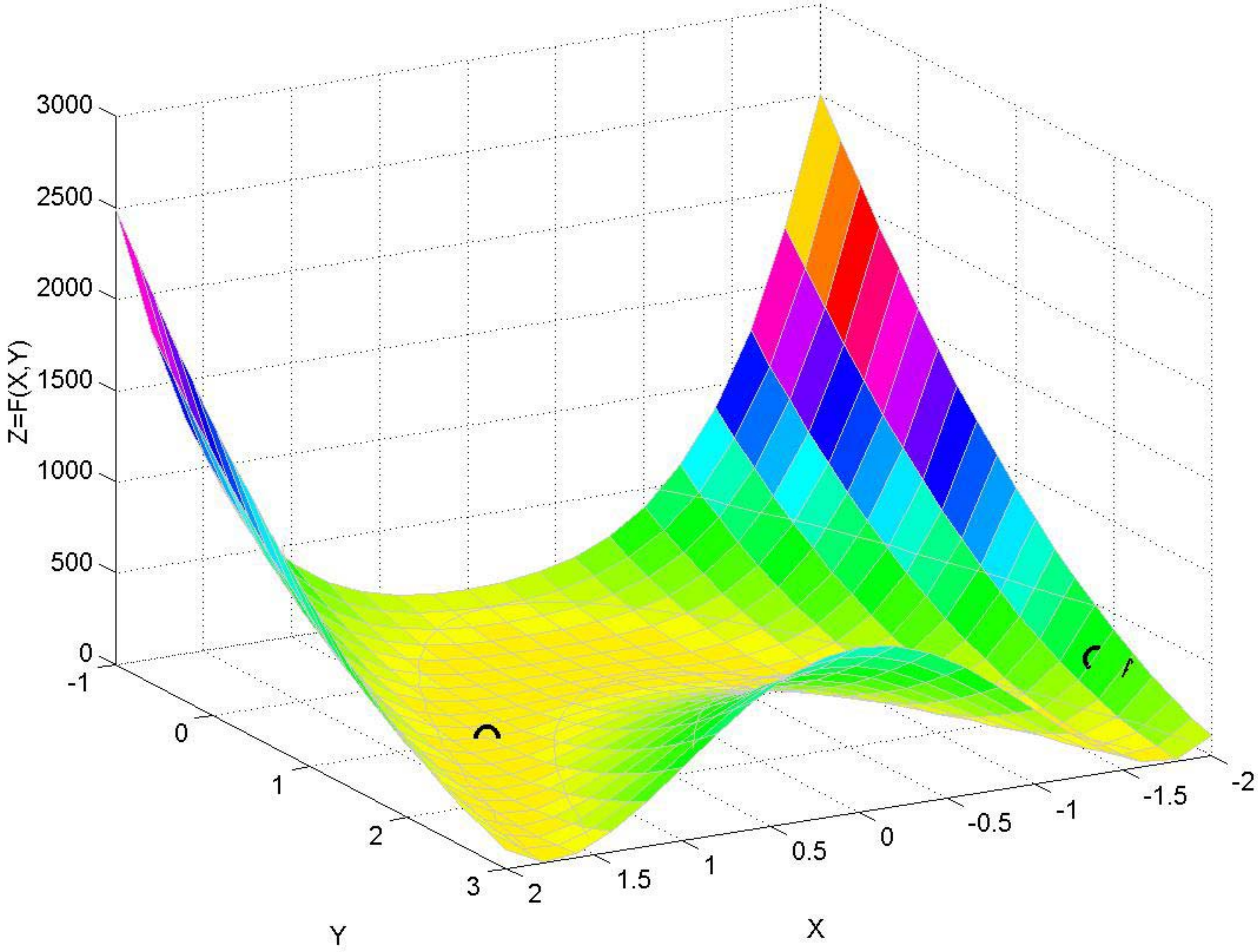
Isolated minimum : local gaussian pit on gaussian hill ("LocalPit2plot"-R.Ababou-2002)
Z=F(X,Y)
10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
-5
0
5
X
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
Y
A

LOCAL PIT

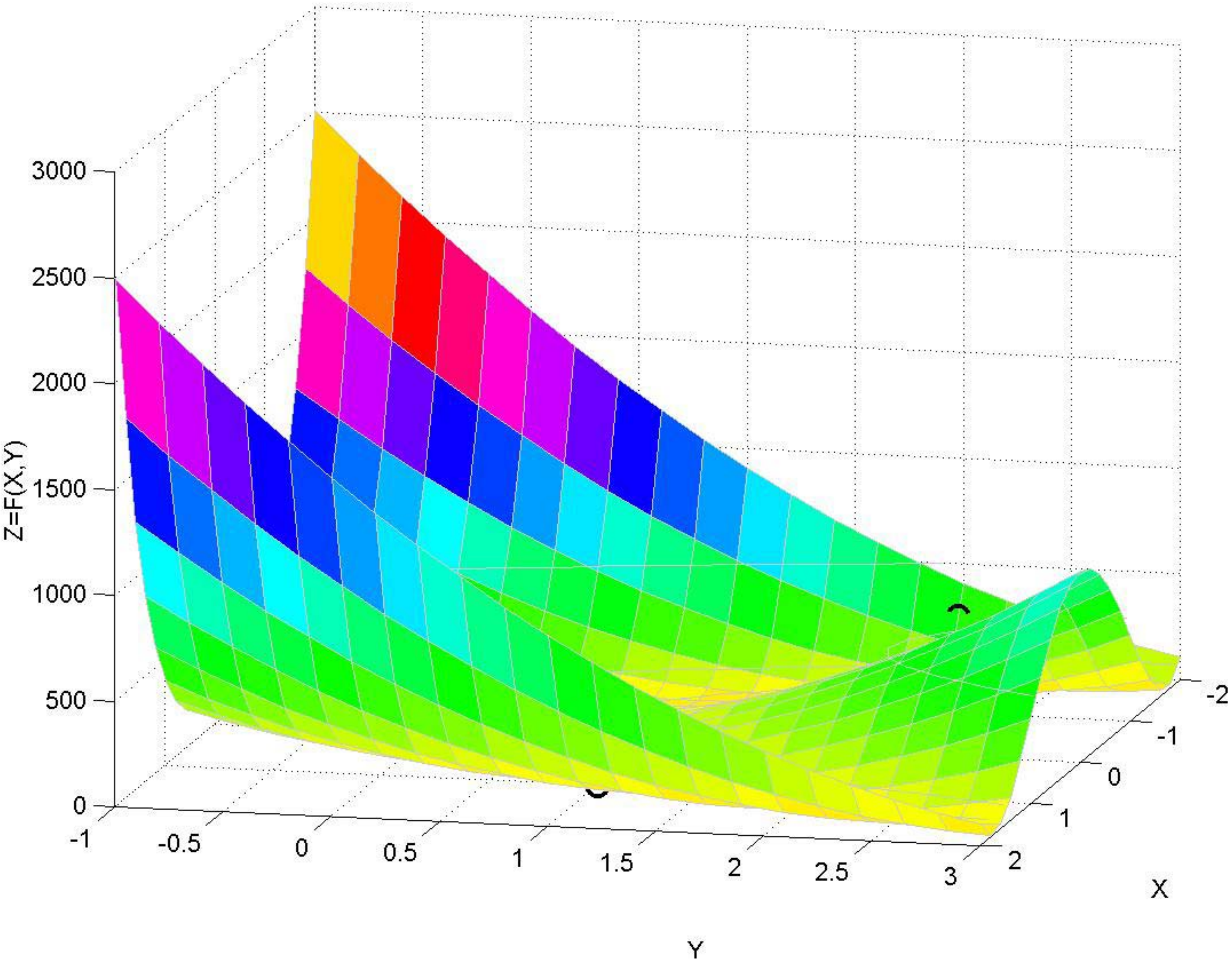
THE BANANA FUNCTION : MINIMUM AT POINT (1,1)



The Banana function : minimum at point (1,1)



The Banana function : minimum at point (1,1)



4. Problèmes d'optimisation 2D et points critiques d'une « surface » z = F(x,y)

OPTIMISATION 2D : POINTS CRITIQUES ET EXTREMA D'UNE SURFACE Z = F(X,Y)

ANNEXE : ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ; PROPRIÉTÉS DES SURFACES Z=F(X,Y)

QUELQUES APPLICATIONS :

- ANALYSE TOPO-MORPHOLOGIQUE DU RELIEF Z = F(X,Y);
- POTENTIELS HARMONIQUES ϕ = F(X,Y);
- …

5. Problèmes a variable d'état vectorielle (généralisation "multi-D")

RÉGRESSION LINÉAIRE, ESTIMATION BAYES → MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE

MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE → RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE SYMÉTRIQUE > 0

OPTIMISATION NON LINÉAIRE GÉNÉRALE (RÉGRESSION NONLINÉAIRE, CALAGE DE MODÈLES, ETC…)

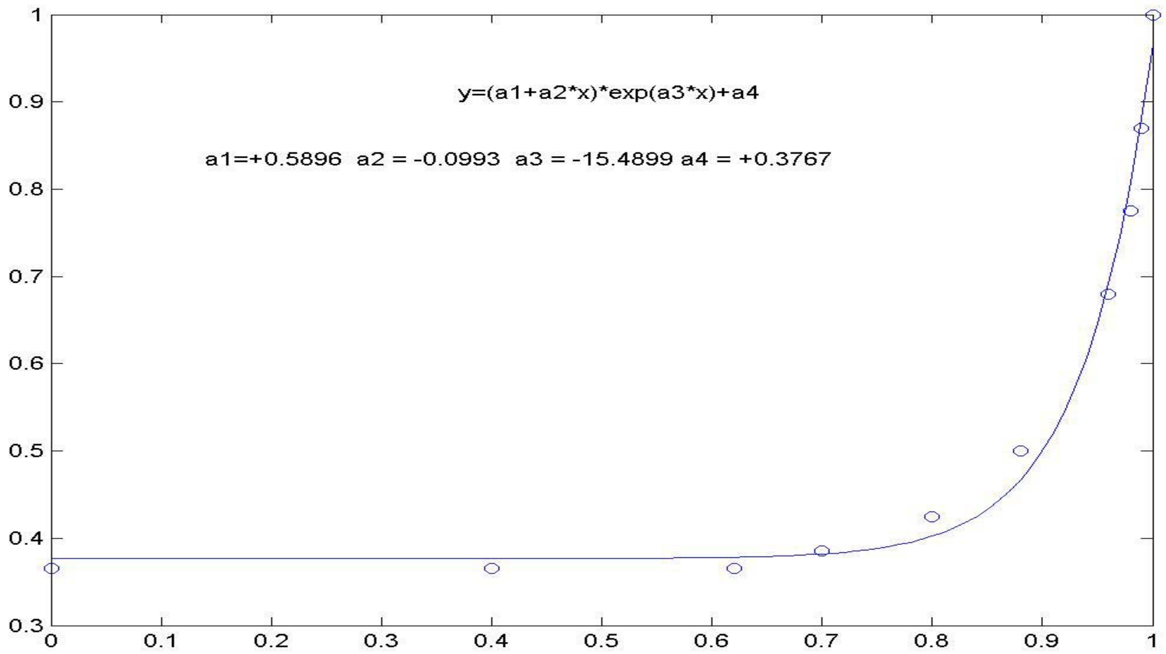
EXEMPLE DE RÉGRESSION NON LINÉAIRE À L'AIDE DE *MATLAB*

LISTING DU PROGRAMME MATLAB

```
% ------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
% Regress_P_Landau.M (R.ABABOU & E.DIAZ, 04 Avril 2002)
% Regression nonlineaire pour obtenir empiriquement l'équation de la pression dans l'explosion forte de Landau-Lifchitz
% (cf. mémoire de fin d'études de E.Diaz sur la modélisation de l'explosion de l'usine AZF à Toulouse le 21 Sept. 2001).
% Responsable de stage: R.ABABOU (Département Hydraulique, ENSEEIHT, 2001-02).
% ------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
      xdata1 = [0;0.4;0.62;0.7;0.8;0.88;0.96;0.98;0.99;1];
      ydata1 = [0.365;0.365;0.365;0.385;0.425;0.5;0.68;0.775;0.87;1];
%%      x = lsqcurvefit(@myfun, [2 7], xdata, ydata)
%    where MYFUN is a MATLAB function such as:
%%      function F = myfun(x,xdata)
%%      F = x(1)*sin(xdata)+x(2);
%    FUN can also be an inline object:
%    Inutile : acoeff(1)=0;a(2)=0;a(3)=0;a(4)=0;
      acoeff0 = [1 1 1 1];
%% fun1=inline('acoeff(1)/((1+acoeff(2).*(xdata1-0.365.*ones(size(xdata1)))).^acoeff(3)).^acoeff(4)','acoeff','xdata1')
%% fun1 = inline('acoeff(1)+acoeff(2).*xdata1+ acoeff(3).*xdata1.^2+acoeff(4).*xdata1.^3','acoeff','xdata1')
%% fun1= inline('0.365+acoeff(1).*(abs(xdata1).^acoeff(2)).*(log(abs(xdata1).*acoeff(3)))','acoeff','xdata1');
   xdata1=1-xdata1;
   fun1=inline('(acoeff(1)+acoeff(2).*xdata1).*exp(acoeff(3).*xdata1)+acoeff(4)','acoeff','xdata1');
   acoeff = lsqcurvefit(fun1,acoeff0, xdata1, ydata1);  % Ceci donne le vecteur des coefficients
```

```
% -------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
dx=0.01;  xgrid1=[0:dx:1];  xgrid1=1-xgrid1;
ygrid1= (acoeff(1)+acoeff(2).*xgrid1).*exp(acoeff(3).*xgrid1)+acoeff(4);
xgrid1=1-xgrid1;  xdata1=1-xdata1;
plot(xgrid1,ygrid1); hold on,
plot(xdata1,ydata1,'o'); hold on,
% -------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
display(acoeff);
```

FIGURE OBTENUE EN OUTPUT DU PROGRAMME MATLAB



II. OPTIMISATION LIÉE (SOUS CONTRAINTES) : PROBLÈMES LINÉAIRES / PROGRAMMATION LINÉAIRE

INTRODUCTION A LA PROGRAMMATION LINÉAIRE :
FORMULATION DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION LINÉAIRE
(A FONCTION OBJECTIF ET CONTRAINTES LINÉAIRES)

MÉTHODE DU SIMPLEXE GRAPHIQUE DANS LE CAS BIVARIÉ (N=2)

ANNEXE → ALGORITHME GÉNÉRAL DU SIMPLEXE DANS LE CAS MULTIVARIÉ (N VARIABLES)

III. OPTIMISATION LIÉE (SOUS CONTRAINTES) : PROBLÈMES NON LINÉAIRES

RAPPELS PRÉALABLES :

Concernant la minimisation d'une fonction objectif F(**x**) en l'absence de contraintes, revoir les conditions d'optimalité classiques du 1er ordre (**grad** F = 0) et du 2nd ordre (Hessienne **H** > 0)…

CAS DE CONTRAINTES ÉGALITÉS

Minimiser : $F(x,y)$

Sous contrainte : $f(x,y)=0$

Méthode directe *:* substitution de y(x)…[*parfois possible*]

Méthode générale : multiplicateurs de Lagrange λ…

CAS DE CONTRAINTES INÉGALITÉS

Minimiser : $F(x,y)$

Sous contrainte : $f(x,y)\geq 0$

Méthode générale : variable d'ajustement « *s* » telle que:

$$f(x,y)=s^2$$

Autres méthodes *:* méthodes de pénalisation, etc [*numérique*]

ANNEXE : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES ÉGALITÉS ET MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

Soit à minimiser la fonction objectif (scalaire) : $F(x_1,...,x_N)$

sous la contrainte égalité (scalaire) : $f(x_1,...,x_N)=0$ *(supposée de type « holonome »)*[1].

Les conditions nécessaires du 1er ordre donnent les points critiques de F (en ignorant d'abord la contrainte) :

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_N}dx_N=0\text{, d'où : }\frac{\partial F}{\partial x_1}=\ldots=\frac{\partial F}{\partial x_N}=0\,.$$

Mais comment tenir compte de la contrainte $f(x_1,\ldots,x_N)=0$?

1. Substitution directe (élimination de variable) :

On peut, dans certaines conditions, exprimer directement $x_N=g(x_1,\ldots,x_{N-1})$ et substituer x_N dans F(…) :

$$F(x_1,...,x_N)=F(x_1,...,g(x_1,...,x_{N-1}))=G(x_1,...,x_{N-1})\ \Rightarrow\ \textit{Minimiser}\ G(x_1,...,x_{N-1})\,.$$

Cependant, cette méthode n'est pas générale (parfois inapplicable)…

[1] Une contrainte « non holonome » serait, par exemple, une contrainte différentielle (le terme « holonome » dépend parfois du contexte et reste à définir plus précisément)…

2. Multiplicateurs de Lagrange (augmentation de variables) :

On peut différencier la contrainte *holonome*[2] $f(x_1,\ldots,x_N) = 0$ comme suit :

$$f(x_1,\ldots,x_N) = 0 \;\Rightarrow\; df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N = 0$$

L'astuce (géniale) de Lagrange est alors d'ajouter l'équation df = 0 à l'équation dF = 0, en introduisant un nouvelle variable ou paramètre inconnu (λ) appelé le multiplicateur de Lagrange :

$$dF + \lambda\, df = 0 \quad \text{ou} \quad \delta F + \lambda\, \delta f = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_N} \delta x_N \right) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \delta x_N \right) = 0 \,, \forall \lambda$$

Remarquer que l'équation ci-dessus est vraie ∀λ. Imposons que λ vérifie : $\dfrac{\partial F}{\partial x_N} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_N} = 0$.

On obtient alors (cette fois-ci, en différentielles exactes) : $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=N-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$.

Mais comme les (N-1) « dx_i » sont libres et indépendants : $\left\{ \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\ldots,N-1) \right.$.

[2] Plus généralement encore, on peut d'emblée traiter des contraintes non-holonomes, de la forme δf = Σ ai δxi où les (δf) sont des variations et non des différentielles exactes.

De plus, tenant compte de l'équation vérifiée par λ, on a : $\lambda = -\left(\partial F / \partial x_N \right) \Big/ \left(\partial f / \partial x_N \right)$.

Il est donc clair que le système précédent peut être étendu au cas i = N sans modification, soit :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \right. \text{ ou : } \boxed{\left\{ \frac{\partial (F + \lambda f)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \right.} \qquad \textbf{Eq.(*)}$$

On voit que cela revient à une minimiser libre (sans contraintes) de la fonction (F+λf).

Mais ce système est à N équations et N+1 inconnues ($x_1, \ldots, x_N$, λ) : il parait donc sous-déterminé.

Où est passé la (N+1)$^{\text{ème}}$ équation ? C'est tout simplement la contrainte originelle :

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_N) = 0}. \qquad \textbf{Eq.(**)}$$

Le système d'équations (*)+(**) est maintenant exactement déterminé : sa résolution donne les valeurs de ($x_1, \ldots, x_N$) et (λ) satisfaisant les conditions d'optimalité du 1$^{\text{er}}$ ordre <u>et</u> la contrainte f = 0. Il reste ensuite à appliquer les conditions du 2$^{\text{nd}}$ ordre au système de (N+1) variables. On obtient alors les variables de décision optimale $(x_1, \ldots, x_N)^{\text{OPT}}$ ainsi que $(\lambda)^{\text{OPT}}$. *NB : On interprétera* $(\lambda)^{OPT}$ *plus loin…*

Généralisation à K contraintes égalité $f_k = 0$ (k=1,…,K) :

$$f \to \vec{f} \;;\; \lambda \to \vec{\lambda} \;;\; F + \lambda f \to F + \vec{\lambda} \bullet \vec{f} \;:\; \boxed{\begin{cases} Min\ F(\mathbf{x}) \\ s.c.: \vec{f}(\mathbf{x}) = \vec{0} \end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{Min\left(F(\mathbf{x}) + \vec{\lambda} \bullet \vec{f}(\mathbf{x})\right)}$$

EXERCICE # 0.1

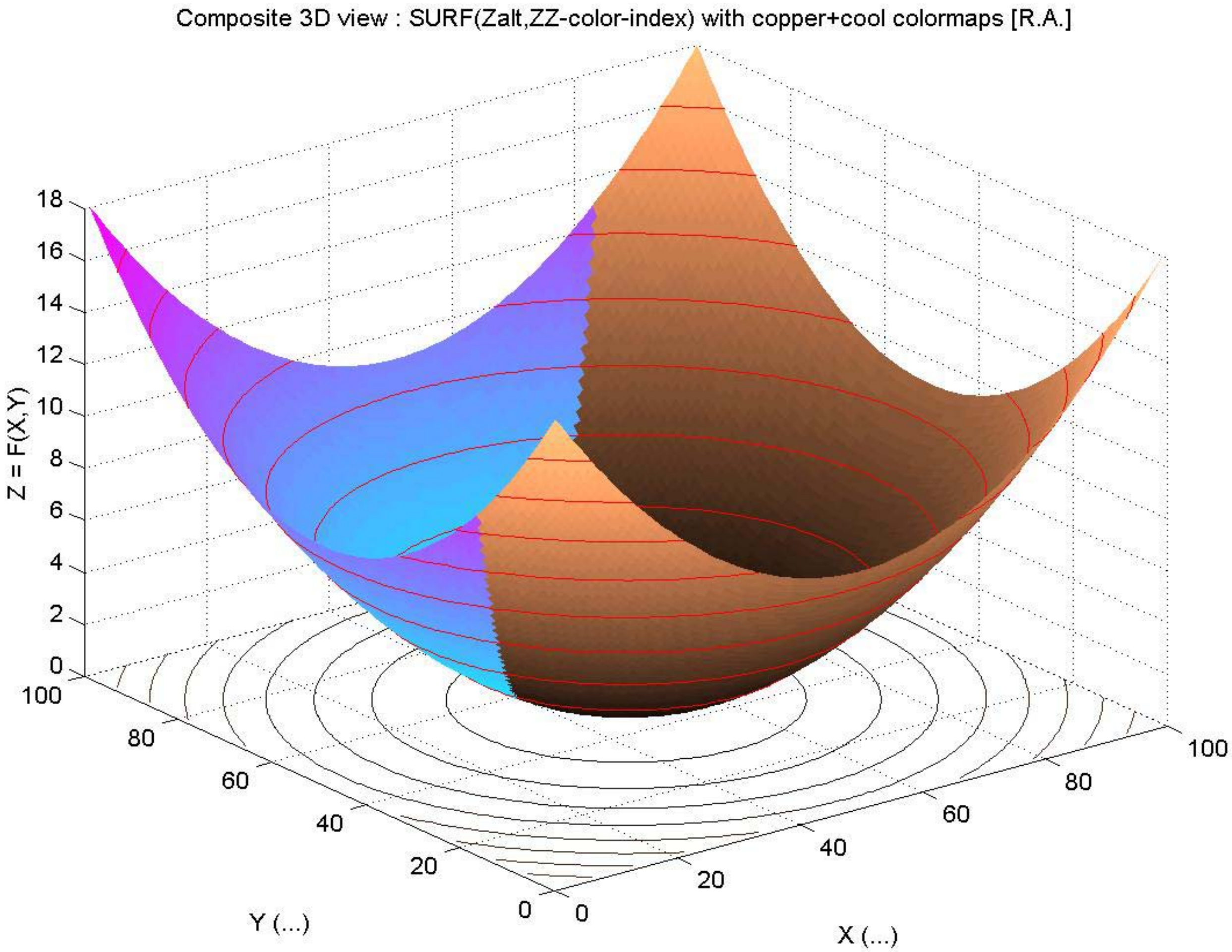
MINIMISATION SOUS CONTRAINTE Y=AX+B D'UNE FONCTION OBJECTIF PARABOLOIDALE

Minimiser : $F(x,y) = x^2 + y^2$ *Sous Contrainte* : $f(x,y) = y - x + 1 = 0$

1ÈRE MÉTHODE : ELIMINATION DE VARIABLES	2ÈME MÉTHODE : MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE
Min F(x,y) s.c. y = x-1 ➔ Min F(x,x-1) ≡ G(x). On a ici : $G(x) = x^2+(x-1)^2 = 2x^2 - 2x + 1$. On a donc une optimisation libre: Min $G(x) = 2x^2-2x+1$ Condition nécessaire du 1er ordre: $\partial G/\partial x=0$ ➔ **$x^*=1/2$** Condition du 2nd ordre (convexité): $\partial^2 G/\partial x^2 > 0$? **OUI** Conclusion : $x^* = 1/2$ minimise bien G(x). Application de la contrainte ➔ $y^* = x^*-1$ ➔ **$y^*=-1/2$**	Min F(x,y) s.c. f(x,y)=0 ➔ Min {F(x,y)+λf(x,y)} Min x^2+y^2 s.c. y-x+1=0 ➔ Min $\{x^2+y^2+\lambda.(y-x+1)\}$ On a donc une optimisation libre / variables (x,y,λ). Les conditions du 1er ordre / (x,y) donnent : $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \end{cases} \quad et : y = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x^* = +1/2 \\ y^* = -1/2 \\ \lambda^* = +1 \end{cases}$

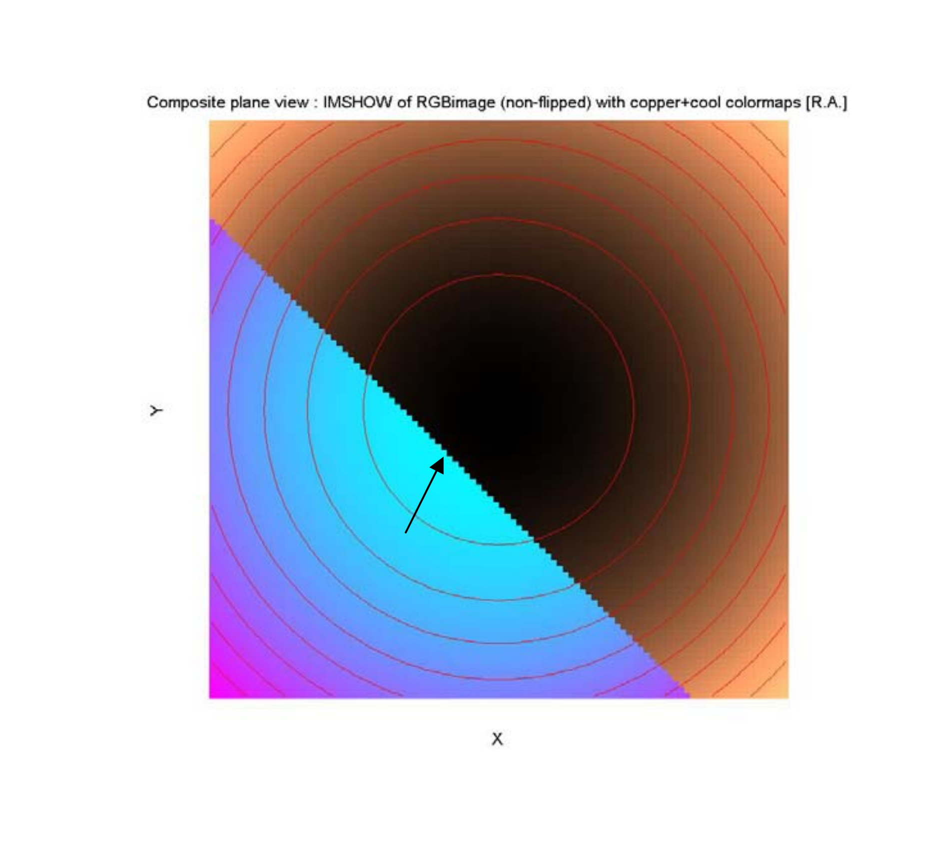
NB: le multiplicateur de Lagrange λ*.représente le "coût" de la contrainte

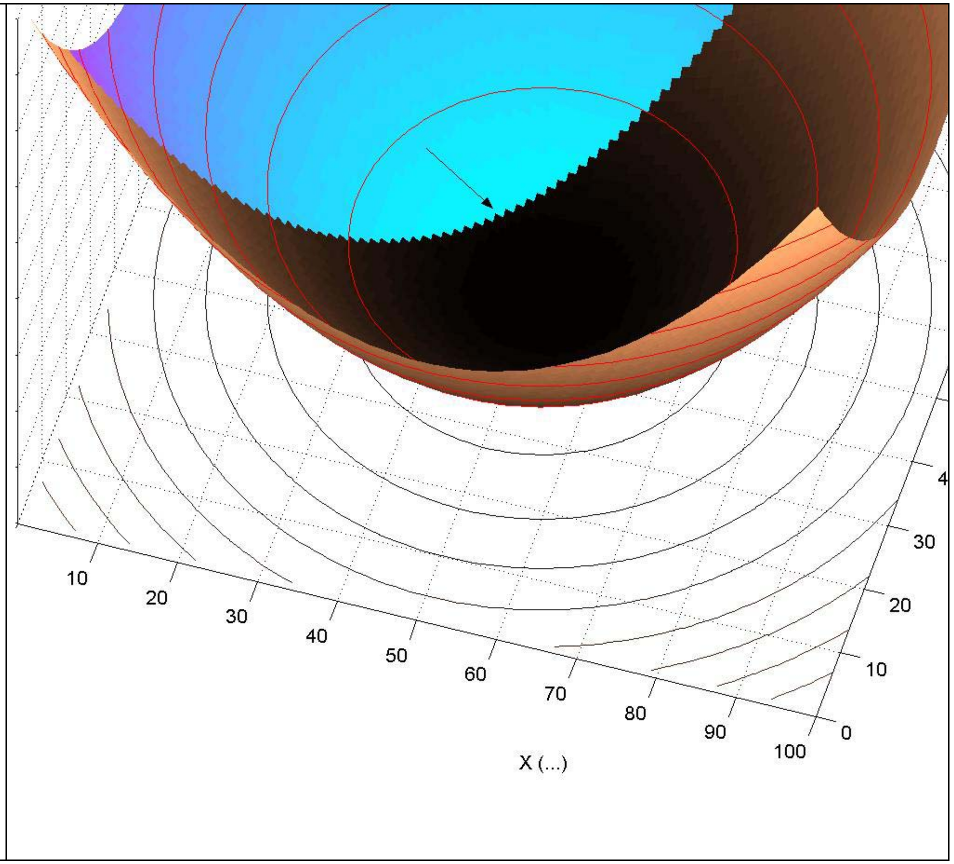
SUITE EXERCICE # 0.1
MINIMISATION SOUS CONTRAINTE Y=AX+B D'UNE FONCTION OBJECTIF PARABOLOIDALE



SUITE EXERCICE # 0.1

MINIMISATION SOUS CONTRAINTE Y=AX+B D'UNE FONCTION OBJECTIF PARABOLOIDALE





ANNEXE : EXERCICES POUR LA 1ère PARTIE

OPTIMISATION SANS CONTRAINTE

1. *Résoudre: Min $J(x) = 3+(x+1)(x-2)$: trouver x_{OPT} et J_{OPT}.

OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE

2. a) Résoudre directement : Min $J(x) = 3+(x+1)(x-2)$ s.c. $x \geq b$.
   En déduire les relations $x_{OPT}(b)$ et $J_{OPT}(b)$.
   b) Que représente concrètement le paramètre défini par $\lambda = -dJ/db$?

3. a) Formuler et résoudre le problème (2) par la méthode générale.
   Indications : on transforme le problème en un problème de minimisation libre (sans contrainte) ;
   1ère étape - introduire une variable d'ajustement; 2ème étape – introduire un multiplicateur de Lagrange.
   b) Comparer les résultats à l'approche directe précédente (interprétation du multiplicateur de Lagrange ?).

PROGRAMMATION LINÉAIRE (SIMPLEXE GRAPHIQUE)

MOINDRES CARRÉS

DIVERS

2ème PARTIE :

OPTIMISATION FONCTIONNELLE

(CALCUL VARIATIONNEL)

IV. INTÉGRALES D'ENERGIE & CALCUL VARIATIONNEL (EULER-LAGRANGE)

V. APPLICATIONS DU CALCUL VARIATIONNEL : GÉODÉSIQUES, CHEMINS & SURFACES MINIMALES…

❑ BIBLIOGRAPHIE THEMATIQUE SUR L'OPTIMISATION [3]

Références Internes (R.A.)

[redacted]

Références générales, mathématiques, encyclopédiques

- Bradley, Hax, Magnanti : Applied Mathematical Programming. Addison-Wesley.
- H.A.Taha : Operations Research, 2nd edition, Collier-McMilan.
- A.Kaufmann: Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. 2 Vols. [Bibliothèque N7].
- D.G.Luenberger : Linear and Nonlinear Programming. 2nd edition. Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1989, 491 pp. [©1973+1984 Addison-Wesley].
- D.G.Luenberger : Introduction to Linear and Nonlinear Programming. [Bib.N7].
- Ortega J.C. et W.C.Rheinboldt: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Comput. Sci. Appl. Math. Series (Rheinboldt ed.). Academic Press. New York 1970. [Chap.4 & Chap.8].
- Press et al : Numerical Recipes. … [Section…]
- F.Reinhardt et H.Soeder: Atlas des Mathématiques (trad. de l'allemand). Section "Optimisation linéaire", pp.478-483.
- J.Abadie (ed.): Nonlinear Programming. North-Holland, Amsterdam, 1967. [éditeur J.Abadie (EDF Paris); articles par G.B.Danzig, H.W.Kuhn, et autres].
- J.Cea: Optimisation : théorie et algorithmes. Gauthier-Villars. Paris.

---

[3] Les références soulignées peuvent être considérées comme plus générales et moins spécialisées que les autres. Une référence peut se trouver classée dans plus d'une rubrique thématique (redondances).

- J.P.Aubin, P.Nepomishtchy, A.M.Charles: Méthodes explicites de l'optimisation. Gauthier-Villars. Paris.
- R.Horst et P.M.Pardalos (eds.): Handbook of Global Optimization. Kluwer Academic Publishers. Boston 1995. [collection d'articles, 900 pages environ].
- C.G.E.Boender et H.E.Romeijn : Stochastic Methods [for Global Optimization]. Handbook of Global Optimization (C.G.E.Boender et H.E.Romeijn eds.). Boston 1995, pp.829-869. [spécialisé].

Mécanique, hydrodynamique, interfaces et surfaces

- C. Lanczos : The Variational Principles of Mechanics. Dover N.Y. 1986, 418 pp. [republication of 4th edition, University of Toronto Press, Toronto 1970].
- S.Hildebrandt et A.Tromba: Mathematics and Optimal Form. The Scientific American Library, N.Y. 1984, 215 pp.
- C.Isenberg: The science of soap films and bubbles, …
- Hale et Lasalle: Differential Equations : Linearity versus Nonlinearity. SIAM Review, Vol.5, No.3, July 1963 [cité par R.Isaacs 1965].

Programmation dynamique (et processus temporels)

- R.Bellman: Dynamic Programming. [Bibliothèque N7].
- R.Bellman: Applied Dynamic Programming. [Bibliothèque N7].
- R.Bellman: Programmation Dynamique Appliquée. [Bib. N7] [trad. de l'anglais].
- R.A. Howard: Dynamic Programming and Markov Processes, The MIT Press 1960 [Published version of Sc.D. thesis, MIT, 1958]. [très spécialisé]

Estimation optimale et contrôle (processus temporels)

- Gelb (editor) : Applied Optimal Estimation, The MIT Press.
- A. Tarantola : Inverse Problem Theory.
- K.Astrom: Intro. Stochastic Control Theory [Bibliothèque N7].
- P.Lefevre: Optim. Statist. des Syst. Dynamiques. [Bibliothèque N7].
- Hale et Lasalle: Differential Equations : Linearity versus Nonlinearity. SIAM Review, Vol.5, No.3, July 1963 [cité par R.Isaacs 1965].

Estimation, contrôle, et problèmes inverses (EDP)

- A. Tarantola : Inverse Problem Theory.
- J.L.Lions: Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Gauthier-Villars. Paris 1968 [sans doute épuisé].
- J.L.Lions: Contrôle des systèmes distribués singuliers, Vol.13 de la série "Méth. Math. Informat.", Gauthier-Villars. Paris 1983 [très spécialisé].

Econométrie, gestion, théorie des jeux

- R.Isaacs: Differential Games (a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization). Dover Publications Inc, NY, 1999, 384 pp. [republication of Wiley 1965 edition].
- P.A.Samuelson: Foundation of economic analysis. Harvard University Press. Enlarged edition, Cambridge, Massachusets, 1983.
- Dorfman, Samuelson, Solow: Linear Programming and Economic Analysis. Dover.

Calcul numérique + divers…

- Ortega J.C. et W.C.Rheinboldt: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Comput.Sci.Appl.Math. series (Rheinboldt ed.). Academic Press. 1970. [Chap.4 & Chap.8].
- Chavent (et al?): Article sur le calage de modèles et la régression nonlinéaire. Advances in Water Resources (1992? 1994?)….
- Press et. al. : Numerical Recipes. Section……
- D. Knuth : www-cs.stanford.edu/ …

LISTE ALPHABETIQUE DES REFERENCES

Liste en préparation (établie à partir des références citées dans le texte *et* de la bibliographie thématique ci-dessus)..

3ème PARTIE :
ANNEXES DU COURS
ET BUREAUX D'ÉTUDES

- **A1 : CALCUL VARIATIONNEL : DÉRIVATION DES FORMULES D'EULER-LAGRANGE**
- **B1 : LISTE DE PROJETS D'OPTIMISATION (BUREAUX D'ÉTUDES)**

ANNEXE A1 :

CALCUL VARIATIONNEL :
DÉRIVATION DES FORMULES D'EULER-LAGRANGE

ANNEXE B1 :

LISTE DE PROJETS D'OPTIMISATION (BUREAUX D'ÉTUDES)