1. BRUIT BLANC GAUSSIEN

- Représentation(s)
- Moments
- Régularisation(s)

Introduction : mode de représentation du bruit blanc

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles ($X \in IR$). Soit $\{x_1,x_2,\dots x_n,\dots,x_N\}$ un ensemble de N réalisations de la v.a. X. Autrement dit, les x_n (n=1,…,N) constituent N répliques indépendantes, générées successivement, de la v.a. X. On peut y associer un temps discret, i.e. N instants $\{t_1,t_2,\dots t_n,\dots,t_N\}$, et écrire $x_n = x(t_n)$. On supposera pour simplifier que le pas de temps $\Delta t=t_{n+1} -t_n$ est constant.

La séquence $\{x(t_1),x(t_2),\dots x(t_n),\dots,x(t_N)\}$ peut être vue comme une réalisation d'un processus temporel « purement aléatoire ». On s'intéresse ici de plus au cas où la loi de probabilité de la v.a. X (génératrice du processus) est une loi gaussienne de moyenne nulle. Tout séquence finie constitue alors un vecteur gaussien.

Le processus aléatoire $X(t_n)$ ainsi défini peut être considéré comme un exemple très particulier de <u>fonction aléatoire</u> (gaussienne et purement aléatoire) en temps discret.

Le bruit blanc gaussien proprement dit, noté X(t) ou f(t), est un processus purement aléatoire gaussien en temps continu, que l'on obtient, intuitivement, comme limite du processus purement aléatoire gaussien défini plus haut lorsque le pas de temps $\Delta t \to 0$.

On verra aussi que le bruit blanc peut être interprété comme un mélange en égales proportions de bruits aléatoires de fréquences diverses, depuis les fréquences nulles jusqu'aux fréquences infinies (d'où le terme bruit « blanc », comme lumière « blanche »).

Définition et moments du bruit blanc stationnaire gaussien

Un bruit blanc gaussien f(t) est une fonction aléatoire en temps continu ($t \in IR$ ou IR^+) possédant les propriétés suivantes :

f(t) est gaussienne
f(t) est de moyenne nulle
f(t) est stationnaire à tous les ordres (i.e. au sens strict),
f(t) a une fonction d'auto-covariance proportionnelle à la « fonction delta » (Dirac)

$$\mu_f \equiv \langle f(t) \rangle = 0$$

$$C_{ff}(\tau) \equiv \langle f(t+\tau) f(t) \rangle = c_0 \ \delta(\tau)$$

Mais, comme $Var\{f(t)\} \equiv C_{ff}(0)$, ceci implique que la variance d'un bruit blanc diverge (tend vers l'infini). Le bruit blanc parfait n'est donc pas physiquement réalisable, mais il est réalisable par contre en version lissée, régularisée, ou tronquée (voir plus bas).

On appelle c_0 l'intensité du bruit blanc ; c_0 a les unités de $[f^2]\times[t]$. Par exemple si f(t) représente un processus de déplacement X(t), avec X en mètres et t en secondes, alors c_0 est en $m^2.s$.

On verra plus loin qu'il est intéressant d'exprimer l'intensité c_0 comme le produit d'une variance σ^{*2} caractérisant un processus f*(t) lié à f(t), et d'un temps caractéristique T* :

$c_0 \equiv \sigma^{*2}\, T^*$, ou simplement $c_0 \equiv \sigma^2\, T$ pour alléger la notation.

Régularisation temporelle du bruit blanc (lissage)

Pour obtenir une version physiquement réalisable du bruit blanc, on propose de construire un bruit blanc « lissé » f*(t) à partir du bruit blanc théorique f(t) défini plus haut. On défini f*(t) comme la moyenne glissante de f(t) sur une durée T, soit :

$$f^*(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(s)\,ds$$

Le nouveau processus aléatoire f*(t) est de moyenne nulle :

$$\langle f^*(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \langle f(s)\rangle\,ds = 0 \text{ puisque } \langle f(s)\rangle = 0.$$

Sa fonction d'auto-covariance en $(t,t+\tau)$ est :

$$C_{f^*f^*} = \langle f^*(t+\tau) f^*(t)\rangle = \frac{1}{T^2}\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds' \int_{t+\tau-T/2}^{t+\tau+T/2} \langle f(s') f(s'')\rangle\, ds''$$

En insérant $C_{ff}(s',s'')=c_0\delta(s'-s'')$ dans l'intégrale, cela donne :

$$C_{f^*f^*} = \frac{c_0}{T^2} \underbrace{\int_{t-T/2}^{t+T/2} ds'}_{0 \; si \; s' \notin \left[t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}\right]} \underbrace{\overbrace{\int_{t+\tau-T/2}^{t+\tau+T/2} \delta(s'-s'')\, ds''}^{0 \; si \; s' \neq s''}}_{0 \; si \; s'' \notin \left[t+\tau-\frac{T}{2}, t+\tau+\frac{T}{2}\right]}$$ [voir **schéma** ci-joint]

d'où finalement une auto-covariance stationnaire, de forme triangulaire :

$$C_{f^*f^*}(\tau) = \frac{c_0}{T} Max\left(0 ; 1 - \frac{|\tau|}{T}\right),$$ [*voir* **schéma** *ci-joint*],

ou encore :

$$C_{f^*f^*}(\tau) = \sigma^2\, Max\left(0 ; 1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \text{ avec } \sigma^2 \equiv Var\{f^*(t)\} = \frac{c_0}{T}.$$

En résumé, on voit bien que l'intensité c_0 du bruit blanc théorique peut s'interpréter comme le produit de la variance d'un bruit blanc « moyenné » (effectivement réalisable et observable) et du temps caractéristique de prise de moyenne T (assimilable à la résolution temporelle effectivement utilisée lors de l'observation).

Noter que la fonction de covariance triangulaire tend bien vers un Dirac quand $T \to 0$. Mais noter aussi que le produit $c_0=\sigma^2 T$ est un invariant, qui ne dépend pas de la résolution T choisie pour observer le bruit blanc.

Régularisation spectrale du bruit blanc (troncature en fréquence)

On obtient un résultat à peu près équivalent au précédent en éliminant du spectre des fluctuations de f(t) celles de fréquences supérieures à un seuil ω_{Max} que l'on peut ajuster (filtre passe-bas). Poser $\omega_{Max} = \pi/T$ pour comparer avec l'approche précédente (…).

Schémas pour la régularisation temporelle du bruit blanc